Cálculo Diferencial II

1. Um forno industrial coze à temperatura constante de 608 graus centígrados. A temperatura do forno, desde o início em que é ligado até atingir a temperatura de cozedura, é dada por:

$$T(t) = \frac{20t^2 + 5t + 32}{t + 2} \quad t \text{ em minutos e } T(t) \text{ em } ^\circ C$$

1.1. Qual a temperatura inicial do forno?

1.2. **Calcule** a variação da temperatura no intervalo de tempo $[2,10]$.

1.3. **Calcule** a variação instantânea da temperatura para $t = 10$.

2. Um reservatório cilíndrico está a receber água através de uma torneira. A altura do nível da água no cilindro, ao fim de t *minutos* após a torneira ser aberta, é dada por:

$$h(t) = \frac{5t}{t+1} \quad h(t) \text{ em } \textit{metros}$$

2.1. **Determine** $h(5) - h(2)$ e $\frac{h(5) - h(2)}{3}$

2.2. **Indique** o significado desses valores no contexto da situação.

2.3. O caudal da torneira é constante? **Justifique**.

2.4. O reservatório ficou completamente cheio ao fim de 9 minutos, contendo 127 litros de água**.** **Determine** o raio da base do reservatório (2 c.d.).

3. A produção P, em kg, de certo produto hortícola numa estufa depende da temperatura t em graus centígrados e é dada pelo seguinte modelo:

$$P(t) = (t+1)^2(32 - t) \quad -8 \le t \le 40$$

Determine a *temperatura* ideal para que a produção seja máxima.

4. Um biólogo reproduz duas espécies de plantas, ***A*** e ***B***. O número de exemplares de cada uma das espécies ao fim de t meses, após o início do processo, é dado por:

Espécie ***A*** : $A(t) = 450 + \ln(t^2 + 1)$; Espécie ***B***: $B(t) = \dfrac{500}{1 + 20e^{-0.5t}}$

4.1. Quantas plantas de cada espécie foram utilizadas no início do processo?

4.2. Qual é a taxa de variação de cada uma das espécie ao fim do 1 ano?

4.3. **Prove que** o número de plantas de cada espécie aumenta à medida que o tempo passa.

5. Um incêndio consumiu 1500 hectares de floresta durante 30 horas. A área ardida durante o incêndio é dada em função do tempo por:

$$A(t) = -\frac{5}{3}t^2 + 100t \text{ ; } t \text{ em horas , } A(t) \text{ em hectares.}$$

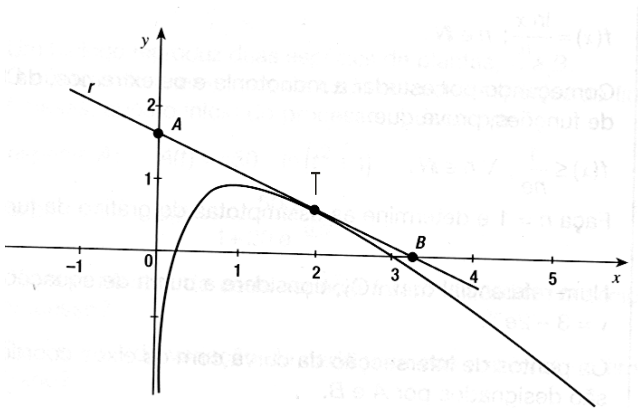
5.1. Ao fim de quantas horas, após o início do incêndio, estava destruída 36% da área ardida?

5.2. Sabendo que o incêndio se iniciou no dia 12 de Julho, pelas 15 horas, **comente as seguintes afirmações**:

A1: " Ao meio-dia do dia 13 de Julho, o incêndio consumia a floresta à velocidade de 50 ha/h".

A2: "o gráfico da função g *definida por* $g(x) = \sqrt{A(x)}$*, real de variável real, não admite assimptotas não verticais".*

6. No referencial da figura está representada parte do gráfico da função $f(x) = -x + \ln\left(\frac{x}{3}\right) + 3$.



A recta r é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2.

Determine, sem recorrer à calculadora gráfica, a área do $\Delta[OTB]$.

7. Seja h a função definida por $h(x) = -x \cdot e^{-x}$. **Determine** a equação da recta tangente à curva representativa de h no ponto de abcissa 2.

8. **Qual é o ângulo** entre a recta tangente ao gráfico de $f(x) = \ln x$ no ponto de abcissa a e a recta tangente ao gráfico de $g(x) = -\ln(-x)$ no ponto de abcissa $-a$.

9. O Valor de um automóvel ao fim de t anos é dado por $V(t) = 5000 \cdot e^{-0.12\,t}$

9.1.) Por que preço foi comprado o automóvel?

9.2.) Represente graficamente a função e determine o valor aproximado do automóvel daqui a 5 anos (*utilize a calculadora gráfica*).

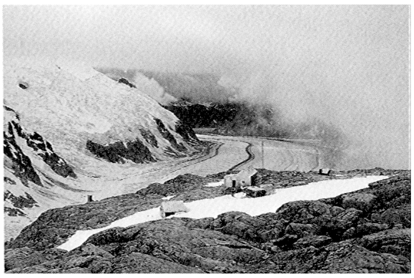
9.3.) A taxa de variação é negativa para qualquer valor de t. Justifique esta afirmação e interprete este facto no contexto da situação.

9.4.) Em que momento a taxa de variação é -250 contos ao ano?

9.5.) Prove que o gráfico de V' tem uma assimptota horizontal. Qual o seu significado relativo à situação?

10. Para determinar qual a velocidade de deslizamento de um glaciar, os técnicos colocaram uma peça de metal na sua superfície. AO deslocamento da peça de metal ao longo do tempo está na seguinte tabela:

t(dias)	d(t) cm
0	0
10	6
20	14
30	24
40	36
50	50



10.1.) **Mostre que** a condição $d(t) = 0{,}01t^2 + 0{,}5t$ permite modelar o fenómeno;

(utilize a calculadora gráfica, no modo estatístico)

10.2.) O deslocamento do glaciar *é constante*? Justifique.

10.3.) **Determine** a velocidade com que se desloca a peça de metal quando $t = 20$.

11. A Ana salta de uma avioneta. A sua velocidade de queda é modelada pela seguinte condição:

$$v(t) = 96(1 - 0.88^t)\ ;\ \ v(t) \text{ em } m\,/\,s$$

11.1.) **Represente** graficamente com a *calculadora gráfica* a *velocidade e a aceleração* de queda da Ana.

11.2.) **Determine** a *aceleração* quando a Ana salta da avioneta ($t = 0$) e passados 10 segundos.

11.3) **Determine** a *velocidade terminal* de queda da Ana. ($\lim\limits_{t \to +\infty} v(t)$)

11.4) **Quantos** segundos demora a Ana a atingir 90% da *velocidade terminal*?

11.5) Quando a Ana atinge 90% da velocidade terminal a sua aceleração é 10% da aceleração inicial. Justifique esta afirmação.

12.) Uma avaria numa central atómica fez disparar o sistema de alarme. Os engenheiros activaram imediatamente os procedimentos de emergência. Suponha que a temperatura T da água (em ^0C) do sistema de refrigeração do núcleo da central evoluiu a partir das 12 horas de acordo com o seguinte modelo matemático.

$$T(t) = \frac{5t^2 + 2t + 128}{t + 2}$$

12.1) **Determine** a temperatura da água de refrigeração quando o sistema de alarme disparou.

12.2) **Calcule** o *valor da taxa de variação* da temperatura quando $t = 1$. **Interprete** o valor encontrado no contexto do problema.

12.3) *Utilizando processos analíticos*, **determine** a temperatura mínima atingida pela água de arrefecimento do núcleo da central atómica.

12.4) A sirene de alarme dispara se a temperatura for superior a 43^0C . *Utilizando a calculadora gráfica*, *determine* durante quanto tempo esteve a sirene a tocar.

13.) Um biólogo reproduz uma espécie de planta A .

O número de exemplares da espécie ao fim de *t* anos, após o início do processo, é dado por:

$$N(t) = \frac{600}{1 + 5e^{-t}} \quad ; \quad (t \geq 0)$$

13.1.) *Utilizando processos analíticos*, **determine** o ano e o mês em que o número de plantas atingiu 250 exemplares.

13.2.) *Utilizando a calculadora gráfica* **indique** em que ano e mês é que o crescimento das plantas foi mais elevado.

14.) Ao injectar, por via intramuscular, um determinado medicamento, ele passa do músculo ao sangue, sendo posteriormente eliminado pela urina. A quantidade de medicamento contido no sangue no instante *t* é dada pelo modelo matemático:

$$M(t) = 2q(e^{-0,4t} - e^{-0.8t})$$

onde t representa o tempo medido em horas e q a quantidade de medicamento injectado.

14.1.) Calcule $\lim\limits_{t \to +\infty} M(t)$. Que pode concluir?

14.2.) Estude a variação da concentração do medicamento no sangue e **determine**, em função de q , *o valor máximo* de M .

14.3.) O medicamento é tanto mais eficaz quanto maior for a sua presença no sangue, mas uma quantidade superior a 10 ml pode ser perigosa e ter efeitos secundários. ***Determine** então a quantidade que deve ser injectada para conseguir a maior eficácia.*