

Primeira Parte

Para cada uma das sete questões desta primeira parte, seleccione a resposta correcta, de entre as alternativas que lhe são apresentadas e **escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde**. Não apresente cálculos. Atenção! Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

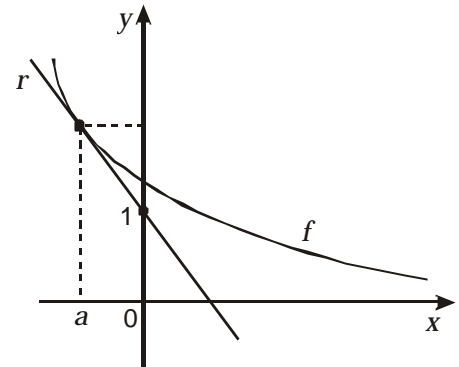
Cotação: cada resposta certa +9 pontos; cada resposta errada, -3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos. Um total negativo nesta primeira parte da prova vale 0 pontos.

1.) Na figura junta estão representadas:

- Parte do gráfico da função f de domínio \mathbb{R} ;
- uma recta r tangente ao gráfico de f no ponto $x = a$

Sabemos que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\frac{1}{2}$

Uma equação da recta r é:



- (A) $y = 3x + 1$ (B) $y = -x + 1$ (C) $y - 1 = -\frac{1}{2}x$ (D) $y = -\frac{1}{2} - 1$

2.) Seja a e b números reais tais que $\log_a(a \cdot b) = 3$, então o valor de b é:

- (A) 1 (B) a (C) b (D) a^2

3.) Seja f a função definida por $f(x) = 5^{x^2 - x}$, o valor de x tal que $f'(x) = 4f(x)$ é:

- (A) 2,5 (B) $2\ln 5 + 0,5$ (C) $\frac{2}{\ln 5}$ (D) $\frac{2}{\ln 5} + 0,5$

4.) Para um certo número real k , é **contínua** a função g definida por:

$$g(x) = \begin{cases} e^{2x} + k & \text{se } x \leq 0 \\ -\frac{1 - e^x}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

O valor de k é:

- (A) -1 (B) 2 (C) 1 (D) 0

v.s.f.f.

5.) De uma função f , contínua em $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, sabe-se que:

- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = 0$

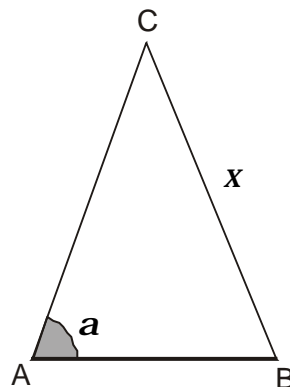
Então, podemos dizer que:

- (A) $x = a$ é uma assíntota vertical e $y = 0$ é uma assíntota horizontal.
- (B) $x = a$ é uma assíntota vertical e $y = x$ é uma assíntota oblíqua.
- (C) $y = a$ é uma assíntota horizontal e $y = x$ é uma assíntota oblíqua.
- (D) $x = -1$ é uma assíntota vertical e $y = a$ é uma assíntota horizontal.

6.) Sendo $f(x) = e^x$, em que e é o Número de Neper, qual é o valor de $f'(1)$?

- (A) 1 (B) 0 (C) $2e$ (D) e^2

7.) A expressão do perímetro em função de a , do triângulo isósceles $[ABC]$ é:



- (A) $2x \cdot (1 + \cos a)$ (B) $4x \cdot \cos x$
 (C) $x \cdot (2 + \cos a)$ (D) $2x \cdot (1 + \operatorname{sen} a)$

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações que entender necessárias.

1. Num lago, o movimento efectuado por uma orca foi registado durante 6 segundos. Na trajectória descrita, a altura relativamente ao nível da água do lago, foi dada, em cada instante t , pelo seguinte modelo:

$$h(t) = 3t - e^{0,5t}, \quad t \text{ em segundos e } h(t) \text{ em metros.}$$

- 1.1. Recorrendo *exclusivamente a processos analíticos* (ou seja, sem utilização da calculadora), resolva as alíneas seguintes:

1.1.1.) **Determine** $h(0)$ e *explique* o seu significado no contexto da situação.

1.1.2.) **Determine a altura máxima** relativamente ao nível da água do lago, que a orca atingiu.

- 1.2. Recorrendo à *calculadora gráfica* resolva a alínea seguinte:

Um grupo de pessoas fez o seguinte comentário: "A orca permaneceu fora da água aproximadamente durante 4 segundos." **Comente a afirmação.**

Na sua argumentação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que considerou para fundamentar a sua resposta.

2. **Prove que** se f é uma função real de variável real, contínua e de domínio \mathbb{R} , que se anula para todos os números naturais, então a função g definida por $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ admite infinitas assíptotas verticais.

3. **Estude** a continuidade, no seu domínio, da função f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x \leq 1 \\ x^2 + 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

v.s.f.f.

4. Determine a equação reduzida da *recta tangente* ao gráfico da função f definida por $f(x) = e^{x^2+1}$ no ponto de abcissa 1.

5. Considere a função f , definida por

$$f(x) = 2x + e^{1-x}, \text{ (} e \text{ é o número de Neper)}$$

Utilize *métodos exclusivamente analíticos*, para resolver as três alíneas seguintes.

5.1. Mostre que a recta de equação $y = 2x$ é uma assíntota ao gráfico f quando $x \rightarrow +\infty$.

5.2. Mostre que a função f tem um único *mínimo*.

5.3. Recorrendo ao estudo analítico da *segunda derivada*, estude a função f quanto ao sentido da concavidade do seu gráfico.

6. Considere a função real de variável real f definida por $f(x) = \sin^2 x - \cos(p - x)$.

Verifique se a função f tem pelo menos um zero no intervalo $\left[\frac{2p}{3}, \frac{5p}{6}\right]$. Utilize *métodos exclusivamente analíticos*.

FIM

Cotação

1	2	3	4	5	6	7	1.1.1.	1.1.2.	1.2	2	3	4	5.1	5.2	5.3	6	Total
9	9	9	9	9	9	9	13	13	14	13	14	13	14	14	14	15	200