

Escola Secundária Dr. Júlio Martins

Ficha de Trabalho N.º 3 de Matemática
Tema: Funções exponenciais e funções logarítmicas

Ano: 12º Turmas: B e D Ano lectivo: 2002/2003 O Prof.: António A. D. Lopes

1. **Resolve** cada uma das seguintes equações:

1.1. $4^x = \frac{1}{16}$. Resposta: $x = -2$

1.2. $\left(\frac{1}{10}\right)^x = 1000$. Resposta: $x = -3$

1.3. $125 = 5^{2-x}$. Resposta: $x = -1$

2. **Calcula** o capital acumulado ao fim de 4 anos e 3 meses por um capital de 2000 euros, colocado a uma taxa anual nominal de 3% com capitalizações contínuas.

Resposta: 2271,97 euros (2 c.d.)

3. **Calcula:**

3.1. $\log_2(64)$. Resposta: 6

3.2. $\log_{16}(16)$. Resposta: 1

3.3. $\log_5(1)$. Resposta: 0

3.4. $\log_3\left(\frac{1}{81}\right)$. Resposta: -4

3.5. $\log_{\frac{1}{4}}(2)$. Resposta: $-\frac{1}{2}$

3.6. $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{16}\right)$. Resposta: 4

3.7. $\log_2\left(\frac{1}{32}\right) + \log_{\frac{1}{32}}(2)$. Resposta: $-\frac{26}{5}$

3.8. $\log 1000$. Resposta: 3

3.9. $\log 0,01$. Resposta: -2

3.10. $\ln e^{-3}$. Resposta: -3

3.11. $\ln e^{\frac{1}{5}}$. Resposta: $\frac{1}{5}$

3.12. $\ln \sqrt[4]{e}$. Resposta: $\frac{1}{4}$

3.13. $\ln e^2 + \ln\left(\frac{1}{e^{10}}\right) + \log 1$. Resposta: -8

4. Sem efectuar as operações dentro de parênteses, **calcula:**

4.1. $\log_2(64 \times 16)$. Resposta: 10

4.2. $\log_3(81 : 27)$. Resposta: 1

4.3. $\log_2(32)^8$. Resposta: 40

4.4. $\log_3\left(\frac{\sqrt[4]{27}}{81^8}\right)$. Resposta: $-\frac{125}{4}$

5. Mostra que $\log\left(\sqrt{\frac{a}{\sqrt[5]{b^3}}}\right) = \frac{1}{2}\log(a) - \frac{3}{10}\log(b)$.

6. Escreve usando o símbolo \log apenas uma vez:

6.1. $\log(x^2) + \log x - \log \sqrt{x}$. Resposta: $\frac{5}{2}\log x$

6.2. $2\log(a^2) - 3\log b$. Resposta: $\log\left(\frac{a^4}{b^3}\right)$

7. Resolve, em \mathbb{R} , cada uma das seguintes condições:

7.1. $\log_3 x = 5$. Resposta: $x = 243$

7.2. $\log_x 3 = 2$. Resposta: $x = \sqrt{3}$

7.3. $2^x = 80$. Resposta: $x = \log_2 80$

7.4. $\log(3x^2) = \log x^3$. Resposta: $x = 3$

7.5. $3^{2x-1} = \sqrt{3}$. Resposta: $x = \frac{3}{4}$

7.6. $x = \log_{36} 6$. Resposta: $x = \frac{1}{2}$

7.7. $\log_{\sqrt{2}}(x+1) = 8$. Resposta: $x = 15$

7.8. $\log_x \sqrt{5} = -\frac{1}{2}$. Resposta: $x = \frac{1}{5}$

7.9. $x \log 1,25 + 3x \log 20 = 1$. Resposta: $x = \frac{1}{4}$

7.10. $3 - \ln(e^{3x}) = 0$. Resposta: $x = 1$

7.11. $\frac{1}{e^x} - 3e^x + 2 = 0$. Resposta: $x = 0$

7.12. $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$. Resposta: $x \in \{0, \ln 2\}$

7.13. $2\ln(x+3) = \ln(1-3x)$. Resposta: $x = -1$

7.14. $2\ln x - \ln(x+3) < \ln(5+x)$. Resposta: $x \in]0, +\infty[$

7.15. $19 - \ln^2 x > \frac{30}{\ln x}$. Resposta: $x \in]e^{-5}, 1[\cup]e^2, e^3[$

7.16. $2e^{4x} + e^{2x} - 10 \leq 0$. Resposta: $x \in]-\infty, \ln \sqrt{2}]$

7.17. $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^x = 4095$. Resposta: $x = 11$

8. Caracteriza, se existir, a função inversa de cada uma das seguintes funções definidas por:

8.1. $g(x) = e^{3x} - 1$. Resposta: $D_{g^{-1}} =]-1, +\infty[$ $D_{g^{-1}} = \mathbb{R}$ $g^{-1}(x) = \frac{\ln(x+1)}{3}$

8.2. $f(x) = 2 - \log(x+3)$. Resposta: $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ $D_{f^{-1}} =]-3, +\infty[$ $f^{-1}(x) = -3 + 10^{2-x}$

8.3. $h(x) = 1 + \log(x^2 - 1)$. Resposta: Como h não é injectiva não tem função inversa.

9. Sabendo que $\log_a x + \log_a y = p$ e $\log_a x - \log_a y = q$, podes concluir que:

- (A) $x = \sqrt{a^{p+q}}$. (B) $x = a^p - a^q$. (C) $x = a^p + a^q$. (D) $x = \sqrt{a^{p-q}}$.

Resposta: (A)

10. Seja k um número real. Para cada valor de k , a equação em x , $\ln x = k^2$:

- (A) admite uma única solução. (B) admite duas soluções.
 (C) não tem soluções para $k \leq 0$. (D) pode não ter solução.

Resposta: (A)

Prova modelo, 1996

11. Uma instituição bancária oferece uma taxa de juro de 8% ao ano, para depósitos feitos numa certa modalidade. Um cliente desse banco, faz um depósito de 100 contos nessa modalidade. Qual é, em euros, o capital desse cliente, relativo a esse depósito, passados n anos?

- (A) $100 + 0,8n$. (B) $100 \times 1,08n$. (C) $100 \times 1,8^n$. (D) $100 \times 1,08^n$.

Resposta: (D)

Adaptado do Exame Nacional, 1ª Fase, 2ª Chamada, 1998

12. Seja $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = \log_2(2 \cdot \sqrt[3]{x})$. Indica qual das expressões seguintes também pode definir a função g :

- (A) $2 + \log_2(\sqrt[3]{x})$. (B) $2 \log_2(\sqrt[3]{x})$. (C) $\frac{3 + \log_2 x}{3}$. (D) $\frac{1 + \log_2 x}{2}$.

Resposta: (C)

Prova modelo, 1999

13. A sucessão (u_n) definida por $u_n = 2 - \frac{n-1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Então podes concluir que $\ln[\lim(u_n)^n]$ é igual a:

- (A) e . (B) e^{-1} . (C) -1 . (D) $+\infty$.

Resposta: (C)

14. Sejam a , b e c três números reais tais que $\log_a(b) = c$. Qual é o valor de $\log_a(ab)$?

- (A) $1 + c$. (B) $a + c$. (C) $a \cdot c$. (D) $a + b \cdot c$.

Resposta: (A)

Prova modelo, 2000

15. Seja f a função definida em \mathbb{R}^+ por $f(x) = \log_2(8x^2) - \log_2 x$.

15.1. Mostra que $f(x) = 3 + \log_2 x$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$.

15.2. Determina a abcissa do ponto de intersecção do gráfico de f com a recta de equação $y = 8$. Resposta: 32

16. Qual é o limite da sucessão de termo geral $u_n = 1 + e^{-n}$?

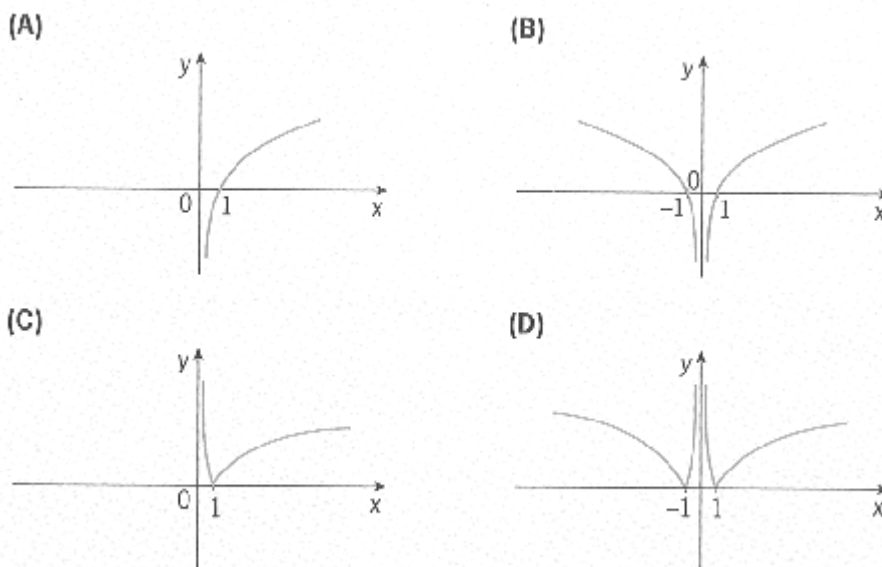
- (A) $-\infty$. (B) 0 . (C) 1 . (D) $+\infty$.

Resposta: (C)

Exame Nacional, 1998

17.

A representação gráfica da função $x \rightarrow \ln|x|$ é a seguinte:



(1996)

Resposta: (B)

19. Considera a função f definida por $f(x) = \ln(3x)$.

Indica qual dos seguintes pontos pertence ao gráfico da função f :

- (A) $(e, \ln 3)$. (B) $(e, 1 + \ln 3)$. (C) $(e, e + \ln 3)$. (D) $(e, e \cdot \ln 3)$.

Resposta: (B)

Exame Nacional, 1998

20. A pressão atmosférica P , em polegadas de mercúrio (1 polegada = 25,4 mm), é dada por $P(h) = 30 \times 10^{-0,09h}$, onde h é a altura, em milhas (1 milha = 1609 metros), acima do nível do mar.

Calcula:

20.1. a pressão atmosférica 3 km acima do nível do mar. Resposta: 20,38 polegadas

20.2. com erro inferior a 0,1 milhas, determina a altura de uma montanha sabendo que no cume a pressão atmosférica é de 505 mm de mercúrio. Resposta: 2 milhas

21. O pH de uma solução é definido por $\text{pH} = -\log[H^+]$, onde $[H^+]$ é a concentração de iões de hidrogénio medida em moles por litro.

O valor de $[H^+]$ para a água é de 10^{-7} .

21.1. **Calcula** o pH da água. Resposta: 7

21.2. Se uma substância tem $0,9 \times 10^{-8}$ de $[H^+]$, ela é ácida ou básica? (Ácida se $\text{pH} < \text{pH}_{\text{água pura}}$, básica se $\text{pH} > \text{pH}_{\text{água pura}}$). Resposta: básica (pH = 8,046)