

Escola Secundária Dr. Júlio Martins

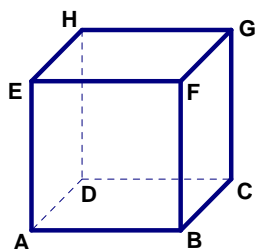
Ficha de Trabalho N.º 11 de Matemática | Preparação para o Exame Nacional

Aluno: \_\_\_\_\_ N.º: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Ano: **12º** Turmas: **B e C** Ano lectivo: **2005/2006** O Prof.: *António A. D. Lopes*

**Primeira Parte**

- 1] Escolhem-se, ao acaso, dois vértices de um cubo pertencentes a duas faces opostas, previamente definidas.



A probabilidade de não pertencerem à mesma aresta do cubo é:

- (A) 25% .  
 (B) 75% .  
 (C) 50% .  
 (D) 60% .

Resposta: (B)

- 2] A probabilidade de a Susana chegar atrasada às aulas é 0,2 . A probabilidade de a Susana chegar atrasada às aulas em apenas um dia nos cinco dias úteis da próxima semana é:

- (A)  $\left(\frac{1}{5}\right)^4 \times \frac{4}{5}$  .      (B)  $\left(\frac{1}{5}\right)^3 \times \frac{4}{5}$  .      (C)  $\frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^4$  .      (D)  $\left(\frac{4}{5}\right)^4$  .

Resposta: (D)

- 3] Considera em  $\mathbb{C}$  a equação  $(1-z)^9 = -1$ . Uma solução da equação dada é:

- (A)  $i$  .      (B)  $-i$  .      (C)  $-2cis\left(\frac{p}{3}\right)$  .      (D)  $1-cis\left(\frac{p}{3}\right)$  .

Resposta: (D)

- 4]  $\frac{29p}{12}$  é solução da equação:

- (A)  $tg(-12x) = 1$  .      (B)  $\cos(6x) = 1$  .      (C)  $sen(2x) = \frac{1}{2}$  .      (D)  $sen(-12x) = -1$  .

Resposta: (C)

- 5] No plano complexo o lugar geométrico das imagens dos números complexos  $z$  que satisfazem a condição  $iz + \bar{z} = 0$  é:

- (A) uma recta horizontal.      (B) uma circunferência.  
 (C) uma recta vertical.      (D) a bissetriz dos quadrantes ímpares.

Resposta: (D)

- 6]  $abcdefgh$  representa uma linha completa do Triângulo de Pascal, em que as letras representam os números dessa linha. Qual das seguintes igualdades é falsa?

- (A)  $a+h=2$  .      (B)  $c=28$  .      (C)  $d=e$  .      (D)  $g=7$  .

Resposta: (B)

- 7] Três amigos decidem ir ao cinema. Estão em exibição quatro filmes e cada um dos amigos, ao acaso, escolhe um dos filmes.

7.1. A probabilidade de os três amigos apresentarem propostas distintas é:

- (A)  $\frac{3}{4}$ .                      (B)  $\frac{{}^4C_3}{4!}$ .                      (C)  $\frac{{}^4A_3}{4^3}$ .                      (D)  $\frac{{}^4A_3}{4!}$ .

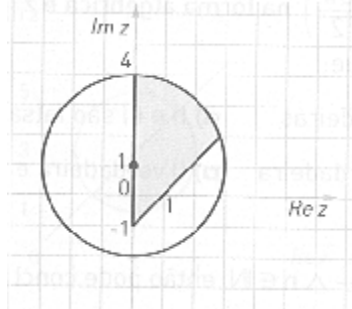
Resposta: (C)

7.2. A probabilidade de os três amigos não escolherem todos o mesmo filme é:

- (A)  $\frac{1}{4}$ .                      (B)  $1 - \frac{{}^4A_3}{4^3}$ .                      (C)  $\frac{3}{4}$ .                      (D)  $\frac{15}{16}$ .

Resposta: (D)

8] A figura representa no plano d'Argand um domínio plano:

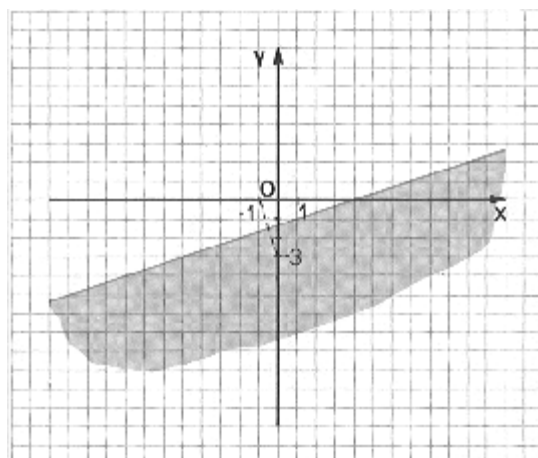


Qual é a condição que define a região a sombreado:

- (A)  $|z - i| \leq 3 \wedge \frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$ .  
 (B)  $|z - i| \leq 3 \vee \frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$ .  
 (C)  $|z - i| \leq 3 \wedge \frac{\pi}{4} \leq \arg(z + i) \leq \frac{\pi}{2}$ .  
 (D)  $|z - i| \leq 3 \vee \frac{\pi}{4} \leq \arg(z + i) \leq \frac{\pi}{2}$ .

Resposta: (C)

9] Qual das condições representa o domínio plano da figura?

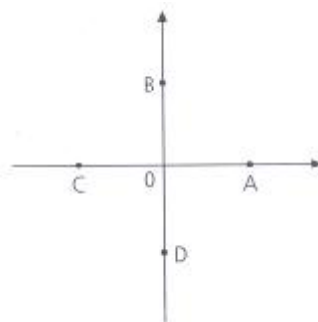


- (A)  $|z - 1| \geq |z - 3i|$ .  
 (B)  $|z + 1| \leq |z + 3i|$ .  
 (C)  $|z + i| \geq |z + 3|$ .  
 (D)  $|z + 1| \geq |z + 3i|$ .

Resposta: (D)

10] Seja  $z = bi$ , com  $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , um número complexo em que  $i$  designa a unidade imaginária.

Qual dos quatro pontos representados na figura junta (A, B, C e D) pode ser a imagem geométrica de  $z^8$ ?



- (A) O ponto A.                      (B) O ponto B.                      (C) O ponto C.                      (D) O ponto D.

Resposta: (A)

11] Considera a função  $f$ , de domínio  $IR$ , definida por  $f(x) = \begin{cases} \ln(1-x) & \text{se } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$  e a

sucessão  $(u_n)$  tal que  $u_n = f\left(2 - \frac{1}{n}\right)$ . Indica qual das expressões seguintes define o termo geral de  $(u_n)$ .

- (A)  $\frac{n}{2n-1}$ .                      (B)  $\ln\left(-1 + \frac{1}{n}\right)$ .                      (C)  $\frac{1}{2} - n$ .                      (D)  $\frac{2n-1}{n}$ .

Resposta: (A)

12] Seja  $f$  uma função de domínio  $IR$  e a função  $g$  definida por  $g(x) = f(-x)$ . Sabe-se que as únicas assintotas do gráfico de  $g$  são as rectas de equações  $x = 2$  e  $y = 2x$ . Então, as assintotas do gráfico de  $f$  são as rectas de equações:

- (A)  $x = 2$  e  $y = -2x$ .    (B)  $x = -2$  e  $y = -2x$ .    (C)  $x = -2$  e  $y = 2x$ .    (D)  $x = 2$  e  $y = 2x$ .

Resposta: (B)

### Segunda Parte

1] Uma moeda defeituosa, quando é lançada, ou sai face  $F$  ou sai verso  $V$ .

Sabe-se que  $p(F) = \frac{1}{3}p(V)$ .

1.1. **Determina**  $P(F)$  e  $P(V)$ .                      Resposta:  $P(F) = \frac{1}{4}$  e  $P(V) = \frac{3}{4}$ .

1.2. **Determina** a probabilidade de, em quatro lançamentos, apenas no último sair verso  $V$ .

**Apresenta** o resultado sob a forma de fracção irredutível.                      Resposta:  $\frac{3}{256}$ .

1.3. Em três lançamentos da moeda, a variável aleatória  $X$  representa o número de faces  $F$  que ocorrem. **Constrói** a tabela da distribuição das probabilidades da variável aleatória  $X$ .    Resposta:

$x_i$	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\left(\frac{3}{4}\right)^3$	$\left(\frac{3}{4}\right)^3$	$\frac{3^2}{4^3}$	$\frac{1}{4^3}$

1.4. O Pedro e o Rui já detectaram que a moeda não é equilibrada. Fazem um jogo que consiste em lançar a moeda cinco vezes. A vitória é atribuída ao Pedro se sair pelo menos duas faces  $F$ . O Rui é considerado vencedor se nos cinco lançamentos ocorrerem exactamente quatro vezes  $V$ . Qualquer outra situação é considerada como empate.

Numa **composição matemática explica** se o jogo te parece equilibrado, isto é, se ambos os jogadores têm igual probabilidade de vencer. Resposta:  $p(\text{Pedro ganhar}) \approx 0,367$  e  $p(\text{Rui ganhar}) \approx 0,396$ . O jogo não é equilibrado.

2] Uma empresa de fertilizantes tem capacidade para produzir até 5000 litros de fertilizante por dia. O custo, em milhares de euros, da produção diária de  $x$  milhares de litros de fertilizante é dado pela função  $P$ , definida por  $P(x) = (x+1)\ln(x+1)$ ,  $0 \leq x \leq 5$ .

2.1. Se, num dos dias, a empresa produzir 3500 litros, **qual** o custo médio por litro?

Resposta:  $\approx 1,93$  €.

2.2. No contexto apresentado, **qual o significado** da expressão  $\frac{P(x)}{x}$  ?

Resposta: Custo médio de 1000 litros expresso em milhares de euros.

2.3. **Calcula**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{P(x)}{x}$ . Resposta: 1.

2.4. Num dos dias, o custo médio por litro de fertilizante saiu a 1,70 €. **Recorrendo à calculadora**, por processos gráficos, **determina** a produção nesse dia. **Apresenta** o resultado em litros, arredondado às unidades. Resposta: 2238 litros.

2.5. Sabe-se que o preço de venda de cada litro de fertilizante é de 2 €. Mostra que o lucro ou prejuízo diário, em milhares de euros, da empresa na venda dos  $x$  milhares de litros produzidos é dada pela função  $L$ , definida por  $L(x) = 2x - (x+1)\ln(x+1)$ . **Sem recorrer à calculadora** (a não ser para efectuar cálculos numéricos) **resolve** o seguinte problema: **De acordo com este modelo, qual deve ser a produção e o lucro correspondente para que este seja máximo?**

**Apresenta** os resultados em litros e em euros, arredondados às unidades.

Resposta: O lucro máximo é de 718 € quando a produção é de 1718 litros.

3] Considera as funções  $f$  e  $g$  definidas por  $f(x) = x + 1 + e^{-x}$  e  $g(x) = \ln x$ .

3.1. **Estuda** a função  $f$  quanto à monotonia e aos extremos.

Resposta: ] em  $IR_0^-$ ; Z em  $IR_0^+$ ; mínimo absoluto igual a  $y = 2$  para  $x = 0$ .

3.2. **Calcula**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Resposta:  $+\infty$ .

3.3. Recorrendo aos resultados obtidos nas alíneas anteriores e ao Teorema de Bolzano, **conclui** que o contradomínio de  $f$  é  $[2, +\infty[$ .

3.4. **Caracteriza** a função  $f \circ g$ . Resposta:  $D_{f \circ g} = IR^+$ ;  $(f \circ g)(x) = 1 + \frac{1}{x} + \ln x$ .

4] Para sulfatar as árvores de um pomar, um agricultor colocou num recipiente uma certa quantidade de sulfato. Para dissolver o sulfato, misturou 50 litros de água. Admite que a massa em gramas, de sulfato ainda não dissolvido,  $t$  minutos após o início do processo de dissolução, é dada por  $S(t) = 250e^{-0,05t}$ ,  $t \geq 0$ .

4.1. **Determina** a massa, em gramas, de sulfato utilizado neste processo. Resposta: 250 g.

4.2. **Calcula** a percentagem de sulfato dissolvido ao fim de meia hora. **Apresenta** o resultado arredondado às unidades. Resposta: 78%.

4.3. **Determina**, caso existam, as assíntotas do gráfico de  $S$ . **Interpreta** as conclusões a que chegaste no contexto do problema. Resposta:  $y = 0$ .

4.4. **Mostra** que  $\frac{S(t+1)}{S(t)} = e^{-0,05}$ . **Interpreta** o resultado anterior no contexto do problema.

4.5. **Calcula**  $S'(10)$  e  $S'(20)$  e, em termos comparativos, interpreta os resultados no contexto do problema. Resposta;  $S'(10) \approx 0,86$  e  $S'(20) \approx 0,70$ . A dissolução do sulfato, ao fim de 10 m, efectua-se mais rapidamente do que ao fim de 20 m.

5] Considera a função  $f$ , de domínio  $IR$ , definida por  $f(x) = \begin{cases} x + \ln x & \text{se } x > 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ \frac{e^{2x} - 1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$ .

**5.1. Verifica** se a função  $f$  é contínua em  $x = 0$ . **Faz** referência às continuidades laterais.

Resposta: Não. É contínua à esquerda em  $x = 0$ , mas não à direita.

**5.2. Diz** se a função é derivável em  $x = 0$ ? **Justifica**. Resposta: Não. Se fosse derivável em  $x = 0$  era contínua nesse ponto.

**5.3. Mostra** que os eixos coordenados são as únicas assíntotas do gráfico de  $f$ .

**5.4. Determina** a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abcissa

1. Resposta:  $y = 2x - 1$

**6** Seja  $f$  a função real de variável real definida por  $f(x) = \text{sen}^2 x - \text{sen } x$ .

**6.1. Calcula** o valor exacto de  $f\left(\frac{5p}{4}\right)$ . Resposta:  $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ .

**6.2. Resolve**, em  $[0, 2p]$  a inequação  $f(x) \geq 0$ . Resposta:  $x \in [p, 2p] \cup \left\{0, \frac{p}{2}\right\}$ .

**6.3. Determina** os zeros da função. Resposta:  $x = \frac{p}{2} + 2kp \vee x = kp, k \in \mathbb{C}$ .

**6.4.** Atendendo a que  $\text{sen}(2a) = 2 \text{sen } a \cos a$  e  $\cos(2a) = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$ , mostra que:

**6.4.1.**  $f'(x) = \text{sen}(2x) - \cos x$ . **6.4.2.**  $f''(x) = -4\text{sen}^2 x + \text{sen } x + 2$ .

**6.5. Mostra** que a função  $f$  admite  $2p$  como período e **estuda-a**, por processos analíticos, quanto aos intervalos de monotonia e existência de extremos. Resposta: ]

em  $\left[-\frac{p}{2} + 2kp, \frac{p}{6} + 2kp\right]$  e em  $\left[\frac{p}{2} + 2kp, \frac{5p}{6} + 2kp\right]$ ,  $k \in \mathbb{C}$ ; **Z** em  $\left[\frac{p}{6} + 2kp, \frac{p}{2} + 2kp\right]$  e

em  $\left[\frac{5p}{6} + 2kp, \frac{3p}{2} + 2kp\right]$ ,  $k \in \mathbb{C}$ ; Max. Abs.:  $y = 2$  quando  $x = \pm \frac{p}{2} + 2kp, k \in \mathbb{C}$  e Min. Abs.:

$y = -\frac{1}{4}$  quando  $x = \frac{p}{6} + 2kp \vee x = \frac{5p}{6} + 2kp, k \in \mathbb{C}$

**6.6.** Recorrendo ao Teorema de Bolzano, **mostra** que o gráfico de  $f$  admite um ponto de

inflexão cuja abcissa pertence ao intervalo  $\left]\frac{2p}{3}, \frac{3p}{4}\right[$ .

**7** O aquário da figura foi construído a partir de uma superfície esférica em vidro com 18 cm de raio.



Considera a situação em que o aquário está vazio e a partir de um certo instante começa a receber água. Sabe-se que  $\overline{OB} = 16$  cm e  $P\hat{O}A = q$  radianos.

**7.1.** Atendendo à informação dada, determina a capacidade total do aquário em litros. Apresenta o resultado arredondado às décimas.  
Resposta: 24,2l.

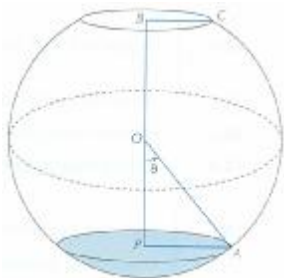
**7.2.** Admite que a função  $A$  faz corresponder a cada valor de  $q$ , em radianos, a área do círculo formado pela superfície da água contida no aquário no processo de enchimento.

**7.2.1.** O domínio da função  $A$  é um intervalo do tipo  $[0, a]$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

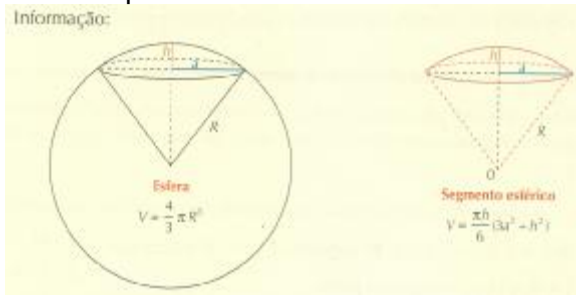
**Determina** o valor de  $a$  arredondado às centésimas.

Resposta:  $a \approx 2,67 \text{ rad}$ .

**7.2.2. Mostra** que a função  $A$  é definida pela expressão  $A(q) = 324p \text{sen}^2 q$ .



**7.2.3. Faz** o estudo do sinal da segunda derivada da função  $A$ . **Determina** os pontos de inflexão e **diz** qual o significado dos valores correspondentes de  $q$  no contexto do problema.



Resposta: Pontos de inflexão

$$\left(\frac{p}{4}, 162p\right) \text{ e } \left(\frac{3p}{4}, 162p\right);$$

$$U \text{ em } \left[0, \frac{p}{4}\right] \text{ e em } \left[\frac{3p}{4}, a\right] \text{ e}$$

$$I \text{ em } \left[\frac{p}{4}, \frac{3p}{4}\right].$$

8] Considera os n.ºs complexos  $w = \left(i^7 + \frac{1}{1-i}\right)^5$ ,  $t = 2\text{cis}\left(\frac{p}{3}\right)$  e  $u = -\text{sen}\left(\frac{4p}{5}\right) + i\cos\left(\frac{4p}{5}\right)$ .

8.1. **Representa**  $w$  na forma algébrica.

$$\text{Resposta: } -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}i.$$

8.2. **Representa**  $\frac{w}{t}$  na forma trigonométrica.

$$\text{Resposta: } \frac{\sqrt{2}}{16} \text{cis}\left(\frac{5p}{12}\right).$$

8.3. **Representa**  $t^4$  na forma algébrica.

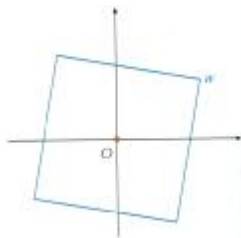
$$\text{Resposta: } -8 - 8\sqrt{3}i$$

8.4. **Representa**  $u$  na forma trigonométrica.

$$\text{Resposta: } \text{cis}\left(\frac{19p}{10}\right)$$

8.5. **Mostra** que  $u$  é solução da equação  $z^5 + z^{10} + z^{20} = i$ .

9] Considera o número complexo  $w = 2\text{cis}\left(\frac{p}{5}\right)$ .



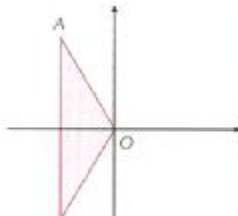
9.1. A imagem geométrica de  $w$  é um dos vértices de um quadrado representado no plano complexo e centrado na origem. **Indica** os outros números complexos cujas imagens geométricas são os outros vértices do quadrado.

$$\text{Resposta: } 2\text{cis}\left(\frac{7p}{10}\right); 2\text{cis}\left(\frac{6p}{5}\right); 2\text{cis}\left(\frac{17p}{10}\right).$$

9.2. **Mostra** que  $w$  é solução da equação  $z^4 = -8\bar{z}$ .

9.3. **Resolve** a equação  $2iz^3 = w$ . Resposta:  $z \in \left\{ \text{cis}\left(-\frac{p}{10}\right); \text{cis}\left(\frac{17p}{30}\right); \text{cis}\left(\frac{37p}{30}\right) \right\}$ .

10] No plano complexo, os pontos  $A$  e  $B$  representados na figura são os afijos de duas das raízes índice três de 1.



10.1. **Define**, por uma condição em  $\mathfrak{L}$ , o triângulo colorido.

$$\text{Resposta: } \text{Re}(z) \geq -\frac{1}{2} \wedge \frac{2p}{3} \leq \arg(z) \leq \frac{4p}{3}.$$

10.2. **Determina** o valor da área do triângulo  $[OAB]$ . Resposta:  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ .

10.3. Multiplicando-se por  $2i$  os números complexos que têm como afijos os vértices do triângulo  $[OAB]$ , obtém-se números cujos afijos são vértices de um novo triângulo.

**Compara** as áreas e os perímetros dos dois triângulos.

Resposta: O perímetro do segundo triângulo é o dobro do do primeiro. A área do segundo triângulo é o quádruplo da do primeiro.