

Resumo do Tema Sucessões

1. Definição: Uma **sucessão** de números reais, (a_n) , é uma função real de variável natural em que o domínio é o conjunto dos números naturais IN .
 n é a urdem do termo ($n \in IN$); a_n é o termo de ordem n ($a_n \in IR$); (a_n) é a sucessão.

2. Sucessões monótonas:

Uma sucessão (a_n) é **crescente** se e só se $\forall n \in IN, a_{n+1} - a_n \geq 0$.

Uma sucessão (a_n) é **estritamente crescente** se e só se $\forall n \in IN, a_{n+1} - a_n > 0$.

Uma sucessão (a_n) é **decrescente** se e só se $\forall n \in IN, a_{n+1} - a_n \leq 0$.

Uma sucessão (a_n) é **estritamente decrescente** se e só se $\forall n \in IN, a_{n+1} - a_n < 0$.

3. Sucessões limitadas.

Definição: Uma sucessão (a_n) é **limitada** se existirem dois números reais m e M tais que $m \leq a_n \leq M, \forall n \in IN$.

O número m é **minorante** do conjunto dos termos da sucessão (a_n) se e só se m é menor ou igual que qualquer termo de (a_n) .

O número M é **majorante** do conjunto dos termos da sucessão (a_n) se e só se M é maior ou igual que qualquer termo de (a_n) .

4. Progressões aritméticas.

Definição: Uma sucessão (a_n) é uma **progressão aritmética** se existe um número real r , tal que $a_{n+1} - a_n = r, \forall n \in IN$.

Ao número r chama-se razão da progressão aritmética,

Propriedade: O termo geral a_n de uma progressão aritmética é dado por

$$a_n = a_1 + (n-1) \times r.$$

$$a_n = a_p + (n-p) \times r, \text{ sendo } a_p \text{ um termo qualquer.}$$

Monotonia: Se $r > 0$, (a_n) é **estritamente crescente**.

Se $r < 0$, (a_n) é **estritamente decrescente**.

Se $r = 0$, (a_n) é **constante**.

Soma dos termos de uma progressão aritmética.

Propriedade: Em n termos consecutivos de uma progressão aritmética, a soma dos termos igualmente distanciados dos extremos é igual à soma dos extremos.

Propriedade: A soma, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$, dos n primeiros termos de uma

progressão aritmética (a_n) é dada por $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \times n$.

$$a_p + a_{p+1} + \dots + a_{n-1} + a_n = S_{n-p+1} = \frac{a_p + a_n}{2} \times (n-p+1) = S_n - S_{p-1}.$$

5. Progressões geométricas.

Definição: Uma sucessão (a_n) de termos não nulos é uma progressão geométrica se existe um número real r , tal que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r, \forall n \in \mathbb{N}$.

Ao número r chama-se razão da progressão geométrica.

Propriedade: O termo geral a_n de uma progressão geométrica é dado por

$$a_n = a_1 \times r^{n-1}.$$

$$a_n = a_p \times r^{n-p}, \text{ sendo } a_p \text{ um termo qualquer.}$$

Monotonia: Se $r < 0$, (a_n) não é monótona.

Se $0 < r < 1$ e $a_1 < 0$, (a_n) é monótona crescente.

Se $0 < r < 1$ e $a_1 > 0$, (a_n) é monótona decrescente.

Se $r = 1$, (a_n) é constante.

Se $r > 1$ e $a_1 < 0$, (a_n) é monótona decrescente.

Se $r > 1$ e $a_1 > 0$, (a_n) é monótona crescente.

Soma dos termos de uma progressão geométrica.

Propriedade: A soma, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$, dos n primeiros termos de uma

progressão geométrica (a_n) é dada por $S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$, $r \neq 1$.

$$a_p + a_{p+1} + \dots + a_{n-1} + a_n = S_{n-p+1} = a_p \times \frac{1-r^{n-p+1}}{1-r} = S_n - S_{p-1}.$$

6. Limites de Sucessões.

Definição: Diz-se que uma sucessão (a_n) converge para um número real L se, qualquer que seja o número real positivo d , existe uma ordem p tal que, a partir dessa ordem, $|a_n - L| < d$.

Simbolicamente: $\lim(a_n) = L \Leftrightarrow \forall d > 0 \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow |a_n - L| < d$.

$$\lim(a_n) = L \Leftrightarrow \forall d > 0 \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow L - d < a_n < L + d.$$

Infinitamente grandes:

Definição: Diz-se que uma sucessão (a_n) é infinitamente grande positivo e escreve-se $\lim(a_n) = +\infty$ ou $a_n \rightarrow +\infty$ se e só se, qualquer que seja o número positivo L , existe uma ordem a partir da qual os termos de (a_n) são maiores que L .

Simbolicamente: $a_n \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \forall L > 0 \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow a_n > L$.

Definição: Diz-se que uma sucessão (a_n) é infinitamente grande negativo e escreve-se $\lim(a_n) = -\infty$ ou $a_n \rightarrow -\infty$ se e só se, $(-a_n)$ é um infinitamente grande positivo

Definição: Diz-se que uma sucessão (a_n) é infinitamente grande em módulo e escreve-se $\lim(a_n) = \infty$ ou $a_n \rightarrow \infty$ se e só se, $(|a_n|)$ é um infinitamente grande positivo

Classificação das sucessões quanto à existência e natureza do limite:

$$\text{Sucessões} \left\{ \begin{array}{l} \text{Convergentes: } a_n \rightarrow L, \text{ em que } L \text{ é um n.º real} \\ \text{Divergentes (não convergentes)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Propriamente divergentes:} \\ a_n \rightarrow +\infty; a_n \rightarrow -\infty \\ \text{Oscilantes:} \\ a_n \rightarrow \infty \text{ ou } a_n = (-1)^n \text{ por exemplo} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Definição: Subsucessão de uma sucessão dada é uma sucessão que se obtém da primeira suprimindo alguns termos.

Propriedade: Todas as sucessões que tendem para $+\infty$ ou são crescentes ou têm subsucessões crescentes.

Propriedade: Se uma sucessão é um infinitamente grande não é limitada.
 Se uma sucessão é não limitada e não é um infinitamente grande, então:

- admite pelo menos uma subsucessão que é um infinitamente grande;
- admite pelo menos uma subsucessão limitada.

Teoremas sobre infinitésimos e infinitamente grandes:

Teorema: Se (a_n) é um infinitamente grande e $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, então $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ é um infinitésimo.

Teorema: Se (a_n) é um infinitésimo e $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, então $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ é um infinitamente grande.

Teoremas sobre sucessões convergentes:

Teorema da unicidade do limite: O limite de uma sucessão convergente é único.

Teorema: O limite de uma sucessão constante é a própria constante.

Teorema: Toda a sucessão monótona e limitada é convergente.

Teorema: Se uma sucessão (a_n) é convergente para L , qualquer subsucessão de (a_n) é convergente para L .

Propriedade: Se duas ou mais subsucessões de uma sucessão são convergentes para o mesmo limite L englobam entre si todos os termos da sucessão então o limite da sucessão é L .

Operações com sucessões convergentes.

Teorema: Se (u_n) e (v_n) são duas sucessões convergentes com limites, respectivamente, a e b , então $(u_n + v_n)$ é convergente e tem por limite $a + b$.

Teorema: Se (u_n) e (v_n) são duas sucessões convergentes com limites, respectivamente, a e b :

- a sucessão $(u_n \times v_n)$ é convergente para $a \times b$.
- a sucessão $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ é convergente para $\frac{a}{b}$, desde que $v_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e $b \neq 0$.

Consequências do Teorema:

1. Se (u_n) é convergente e $k \in \mathbb{R}$ (constante), então $\lim(k \times u_n) = k \times \lim(u_n)$.
2. Se (u_n) e (v_n) são sucessões convergentes, então $\lim(u_n - v_n) = \lim(u_n) - \lim(v_n)$.
3. Se (u_n) é convergente e $p \in \mathbb{N}$, então $\lim(u_n)^p = (\lim(u_n))^p$.

Teorema: Se (u_n) é convergente e $p \in \mathbb{N}$, então $(\sqrt[p]{u_n})$ é convergente (supondo que $u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ se p é par) e tem-se: $\lim \sqrt[p]{u_n} = \sqrt[p]{\lim(u_n)}$.

Teorema das sucessões enquadradas: Se (u_n) e (v_n) são duas sucessões convergentes com o mesmo limite a e se, a partir de certa ordem, a sucessão (w_n) é tal que $u_n \leq w_n \leq v_n$, então, $\lim(w_n) = a$.

Teoremas:

- $\lim|u_n| = |\lim u_n|$.
- Se na sucessão convergente (u_n) é, a partir de certa ordem, $u_n \geq 0$, então $\lim(u_n) \geq 0$.
- Se (u_n) e (v_n) são sucessões convergentes, e, a partir de certa ordem se tem $u_n \geq v_n$, então $\lim(u_n) \geq \lim(v_n)$.

Operações com limites infinitos.

Teorema: Se (u_n) tende para $a \neq 0$ (finito ou infinito) e (v_n) é um infinitamente grande, então $(u_n \times v_n)$ é um infinitamente grande.

Nota: $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$ $(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$ $(-\infty) \times (+\infty) = -\infty$ $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$

$$\text{Se } a > 0: \quad a \times (+\infty) = +\infty \quad a \times (-\infty) = -\infty$$

$$\text{Se } a < 0: \quad a \times (+\infty) = -\infty \quad a \times (-\infty) = +\infty$$

$$\frac{a}{\infty} = 0, \quad a \in \mathbb{R} \text{ (} a \text{ é finito)} \quad \frac{a}{0} = \infty, \quad a \neq 0 \text{ (} a \text{ é finito ou infinito)}$$

Teorema: Se $u_n \rightarrow a$, com $a \in \mathbb{R}$, e (v_n) é um infinitamente grande, então $(u_n + v_n)$ é um infinitamente grande.

$$\text{Se } a \in \mathbb{R}: \quad a + (+\infty) = +\infty \quad a + (-\infty) = -\infty$$

Nota: $(+\infty) + (+\infty) = +\infty \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty$

Teorema: Se $u_n \rightarrow +\infty$, então $(u_n)^p \rightarrow +\infty, \forall p \in \mathbb{N}$.

Nota: $(+\infty)^p = +\infty, \forall p \in \mathbb{N} \quad \infty^p = \infty (p \in \mathbb{N})$

$$\text{Se } p \text{ é par, } (-\infty)^p = +\infty \quad \text{Se } p \text{ é ímpar, } (-\infty)^p = -\infty$$

Teorema: Se $u_n \rightarrow +\infty$ e $u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, então $\sqrt[p]{u_n} \rightarrow +\infty, \forall p \in \mathbb{N}$.

Nota: $\sqrt[p]{\infty} = \infty (p \in \mathbb{N})$

Indeterminações: $0 \times \infty \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \frac{0}{0} \quad \infty - \infty$

Sucessão $(a^n), a \in \mathbb{R}$.

- Se $a \leq -1$ ou $a > 1$ a sucessão é divergente.
- Se $-1 < a < 1$ a sucessão é convergente para zero.
- Se $a = 1, a^n = 1$ é constante e convergente para um.

Soma de todos os termos de uma progressão geométrica:

Se $|r| < 1$, então $S = \lim \left(u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} \right) = \frac{u_1}{1-r}$.

O número de Neper e .

Definição: O número e é um número irracional, isto é, corresponde a uma dízima infinita não periódica. $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$; (u_n) é uma sucessão monótona crescente e

limitada $2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e, \forall n \in \mathbb{N} \quad \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e; 2,718281828459...$

Cálculo de limites de sucessões envolvendo o número de Neper.

Propriedade: Se $x \in \mathbb{R}$ e u_n é um infinitamente grande, então $\lim \left(1 + \frac{x}{u_n}\right)^{u_n} = e^x$.

$$\lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \quad \text{e} \quad \lim \left(1 + \frac{x}{u_n}\right)^{u_n} = e^x, \text{ com } x \in \mathbb{R}.$$

O número de Neper na matemática financeira.

$M = C \times \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{n \times t}$; C é o capital inicial; i é a taxa de juro nominal; n é o n.º de capitalizações por ano; t é o número de anos de duração da capitalização e M é o capital acumulado,

Para capitalizações contínuas:

$$n \rightarrow +\infty \text{ logo } M = \lim C \times \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{n \times t} = C \times \left[\lim \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n \right]^t = C \times e^{i \times t}$$