Escola Secundária Dr. Júlio Martins

Probabilidades e Combinatória. Função Exponencial e Função Logarítmica. Limites de Funções. Continuidade. Assimptotas do Gráfico de uma Função.

Aluno: ____ N.º: _____ Turma: _____

Primeira Parte

1 Considera uma função f de domínio $IR\setminus\{5\}$, contínua em todo o seu domínio.

Sabe-se que: $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = -3$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$ e $\lim\limits_{x\to -\infty}\left[f(x) - x\right] = 0$.

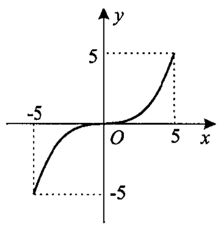
Em cada uma das opções seguintes, estão escritas duas equações, representando cada uma delas uma recta.

Em qual das opções as duas rectas assim definidas são as **assimptotas do gráfico** da função f?

(A) $y = 2$ e $x = 5$. (B) $y = x$ e $y = 2$. (C) $y = x$ e $x = 5$. (D) $y = -3$ e $x = 2$.

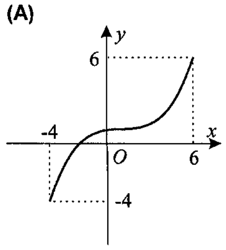
Exame Nacional 1ª Fase 2005

2 Considera a função f, de domínio $[-5,5]$ e contradomínio $[-5,5]$ representado na figura junta:

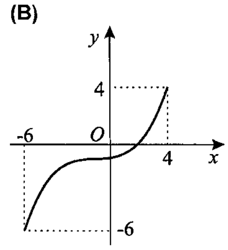


Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função g, definida por $g(x) = 1 + f(x-1)$?

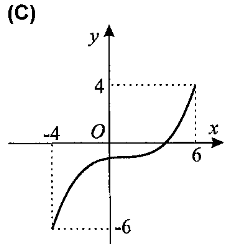
(A)



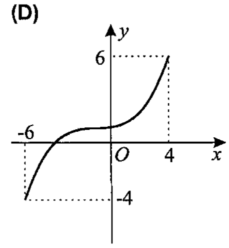
(B)



(C)



(D)



Adaptado do Exame Nacional 2ª Fase 2005

3 De uma função f, contínua em IR, sabe-se que $f(3) = 8$ e $f(7) = 1$.

Qual das afirmações seguintes é **necessariamente** verdadeira?

(A) $1 \le f(6) \le 8$.

(B) A função f não tem zeros em $[3,7]$.

(C) $f(4) > f(5)$.

(D) 2 pertence ao contradomínio de f.

Exame Nacional 2ª Fase 2005

$\boxed{4}$ De uma função g de domínio IR^-, sabe-se que a recta de equação $y=2$ é assimptota do seu gráfico. O resultado de $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}$ é:

(A) $-\infty$. (B) 2. (C) 0. (D) -2.

$\boxed{5}$ De uma função f sabe-se que f é contínua em $x=2$ e $f(3)=5$.
Qual das afirmações é **necessariamente** verdadeira?

(A) $\lim\limits_{x\to2} f(x)=f(2)$. (B) A função f é contínua em $x=3$.

(C) $\lim\limits_{x\to3} f(x)=5$. (D) $f(2)<5$.

$\boxed{6}$ Uma pasta tem um código com 3 algarismos de 1 a 9. O dono da pasta **esqueceu o código** mas sabe que **era um número ímpar**, **sem algarismos repetidos e inferior a 500**.
Qual a probabilidade de abrir a pasta **à primeira tentativa**?

(A) $\frac{14}{2187}$. **(B)** $\frac{1}{63}$. **(C)** $\frac{1}{126}$. **(D)** $\frac{1}{2187}$.

$\boxed{7}$ No dia de São Valentim **3 casais** de namorados decidem festejar em conjunto.
Resolvem ir ao cinema e um deles comprou os bilhetes e distribuiu-os ao acaso.
Qual a probabilidade de **os namorados ficarem sentados lado a lado**?

(A) $\frac{1}{120}$. **(B)** $\frac{1}{240}$. **(C)** $\frac{1}{15}$. **(D)** $\frac{1}{42}$.

$\boxed{8}$ No primeiro ano de uma Universidade, são propostas **10 disciplinas** das quais **6 são de escolha obrigatória e 4 de opção**. **Quantas escolhas** poderá fazer cada estudante, sabendo que **tem de se inscrever em 5 disciplinas sendo pelo menos 3 das obrigatórias**?

(A) 56. **(B)** 200. **(C)** 50. **(D)** 186.

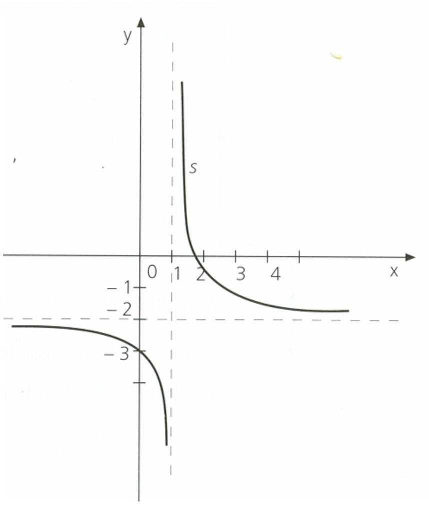
$\boxed{9}$ Um Centro Comercial tem 2 elevadores que se avariam com alguma frequência. As avarias são independentes uma da outra. O elevador X avaria-se **1 vez em cada 8 dias** e o elevador Y **avaria-se 1 vez em cada 10 dias**.
Qual a probabilidade de ir ao Centro Comercial em determinado dia e **encontrar um e apenas um elevador avariado**?

(A) $21{,}25\%$. **(B)** 20%. **(C)** $22{,}5\%$. **(D)** $2{,}5\%$.

$\boxed{10}$ Se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=4$ **e** $\lim\limits_{x\to1} f(x)=+\infty$ **e** $g(x)=f(x+2)+1$, **podemos garantir** para o gráfico de g as assimptotas com as seguintes equações:

(A) $y=5$ e $x=3$. (B) $x=-1$ e $y=5$. (C) $y=2$ e $x=6$. (D) $y=2$ e $x=2$.

$\boxed{11}$ Na figura está desenhada parte da representação gráfica de uma função s, cujo domínio é $IR \setminus \{1\}$. As rectas de equações $x=1$ e $y=-2$ são assimptotas do gráfico de s.



11.1. Seja (a_n) a sucessão de termo geral $a_n = \log\left(\frac{1}{n}\right)$. O $\lim s(a_n)$ é:

(A) $-\infty$. **(B)** 1. **(C)** $+\infty$. **(D)** -2.

11.2. Seja (b_n) a sucessão de termo geral $b_n = e^{-n}+1$. O $\lim s(b_n)$ é:

(A) $-\infty$. **(B)** 1. **(C)** $+\infty$. **(D)** -2.

$\boxed{12}$ O valor de k de modo que a função, real de variável real, f definida por

$$f(x)=\begin{cases} x-k & se\ \ x\leq 0 \\ \dfrac{2x}{\ln(1+x)} & se\ \ x>0 \end{cases}$$ seja contínua no ponto $x=0$ é:

(A) -2. **(B)** 0. **(C)** 2. **(D)** 1.

$\boxed{13}$ O valor de $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2}}{x-3}$ é:

(A) -1. **(B)** $-\infty$. **(C)** 1. **(D)** $+\infty$.

$\boxed{14}$ O valor de k de modo que a função, real de variável real, f definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^3-k & se\ \ x\leq 0 \\ \dfrac{e^{x+1}-e}{x} & se\ \ x>0 \end{cases}$$ tenha limite no ponto $x=0$ é:

(A) 1. **(B)** e. **(C)** $-e$. **(D)** 0.

15 O valor de $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$ é:

(A) 1. **(B)** $-\infty$. **(C)** 3. **(D)** $+\infty$.

Segunda Parte

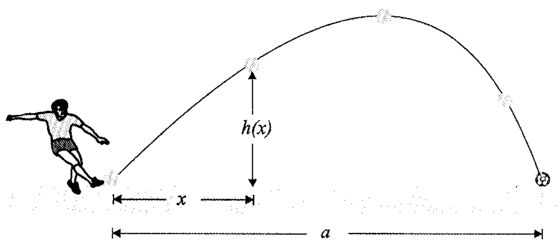
1 Admite que o número de elementos de uma população de aves, t anos após o início de 1970, é dado aproximadamente por $P(t)=5{,}2\times 10^7\times e^{(N-M)t}$, $t\geq 0$, em que N e M são duas constantes, denominadas, respectivamente, taxa de natalidade e taxa de mortalidade da população.
Sem recorrer à calculadora, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, resolve as duas alíneas seguintes:

1.1. Sabendo que $N<M$, **calcula** $\lim_{t\to+\infty} P(t)$ e **interpreta** o resultado obtido, no contexto do problema.

1.2. No início de 2000, a população era metade da que existia no início de 1970.
Sabendo que a taxa de natalidade é $7{,}56$, **determina**, a taxa de mortalidade.
Apresenta o resultado arredondado às centésimas.
Nota: Sempre que nos cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva, no mínimo, três casas decimais.

Exame Nacional 1ª Fase 2005

2 Na figura está representada a trajectória de uma bola de futebol, depois de ter sido pontapeada por um jogador da selecção portuguesa, durante um treino de preparação para o EURO 2004.



Designa por a a distância em metros, entre o ponto onde a bola foi pontapeada e o ponto onde ela caiu.
Considera a função h definida em $[0,a]$ por $h(x)=2x+10\ln(1-0{,}1x)$. Admite que $h(x)$ é a distância, em metros, da bola ao solo, no momento em que a sua projecção no solo se encontra a x metros do local onde foi pontapeada.
Recorrendo à calculadora, **determina** o valor de a, arredondado às centésimas e **conclui** qual foi a maior altura que a bola atingiu relativamente ao solo depois de pontapeada.
Explica como procedeste, apresentando todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora.

Exame Nacional 2ª Fase 2005

3 No início de 1972 havia 400 lobos num determinado parque natural.
As medidas de protecção a lobos fizeram com que o referido número aumentasse continuamente. Os recursos do parque permitem que o número de lobos cresça até bastante perto de um milhar, mas não permitem que esse valor seja ultrapassado.

Nestas condições apenas uma das expressões seguintes pode definir a função P que dá o número aproximado de lobos existentes no parque natural, t anos após o início de 1972.

(A) $\dfrac{1000}{1+e^{-0,5t}}$.

(B) $\dfrac{1000}{1+1,5e^{-0,5t}}$.

(C) $\dfrac{1200}{1+2e^{-t}}$.

(D) $1000-\dfrac{600\left(t^3+1\right)}{e^t}$.

Qual é a expressão correcta? Numa pequena composição com cerca de dez linhas, explica as razões que te levam a rejeitar as outras três expressões **(apresenta três razões diferentes, uma por cada expressão rejeitada)**.

Nota: Podes recorrer às capacidades gráficas da tua calculadora. **Se o fizeres deves reproduzir o(s) gráfico(s) obtido(s)**.

Exame Nacional 2ª Fase 2005

4 Considera as funções reais de variável real f e g definidas por $f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{e^x}+2x$ e $g\left(x\right)=\log_2 x+3x$.

4.1. **Mostra** que a recta de equação $y=2x$ é uma assimptota do gráfico de f.

4.2. **Determina** as equações das assimptotas do gráfico de g.

4.3. **Mostra**, analiticamente, que a equação $g\left(x\right)=\pi$ é possível no intervalo $\left[1,\dfrac{3}{2}\right]$.

5 *"… A recolha de sangue tem aumentado sem quebras desde 1996 mas não é ainda suficiente para as necessidades do país…"*. Admite que o número de unidades de sangue colhidas, por ano, desde 1996 $\left(t=0\right)$ é dado pela expressão $S\left(t\right)=100\times\log_2\left(4,25+0,5t\right)$, com $S\left(t\right)$ em milhares e t em anos.

5.1. **Quantas unidades** de sangue foram colhidas em 1996?

5.2. O país seria auto-suficiente se, por ano, recolhesse 300 000 unidades se sangue. **Em que ano** se prevê que tal venha a acontecer?

5.3. **Cada unidade** de sangue **contém** aproximadamente **450 cm^3**. **Quantos litros** de sangue foram recolhidos durante o ano de 1998?

6 Um forno estava em plena laboração e houve uma falha de energia eléctrica, durante algumas horas. Desde o instante em que houve a falha de energia eléctrica, a temperatura no interior do forno é dada pela expressão $T\left(t\right)=2^t+256\times2^{-t}$, t em horas e T em graus Celsius.

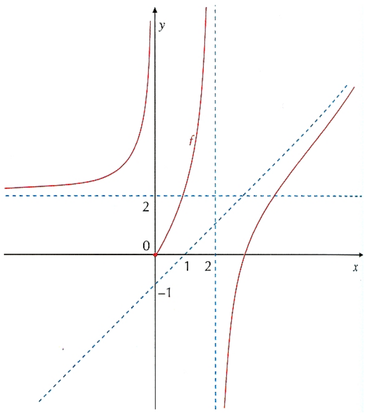
6.1. **Qual a temperatura**, do interior do forno, no momento em que houve a falha de energia eléctrica?

6.2. A avaria ocorrida fez com que a temperatura no interior do forno descesse até os 32° C. A partir desse instante, a energia foi restabelecida e a temperatura voltou a subir. **Durante quanto tempo** houve falta de energia eléctrica?

6.3. **Ao fim de quanto tempo** foi restabelecida a temperatura inicial (instante da falha)?

6.4. **Durante quantas horas** a temperatura foi inferior a 130° C?

7 No referencial figura está representada graficamente uma função f de domínio $IR\setminus\left\{2\right\}$, e as quatro únicas assimptotas que o gráfico de f admite, sendo uma delas a recta de equação $x=0$.



7.1. **Indica** os resultados dos seguintes limites:

7.1.1. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

7.1.2. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

7.1.3. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$.

7.1.4. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

7.1.5. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

7.1.6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

7.1.7. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[f(x)-x+1\right]$.

7.1.8. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

7.2. **Indica** as equações das assimptotas dos gráficos de cada uma das funções g, h e j definidas por $g(x)=2+f(x-1)$, $h(x)=f(-x)$ e $j(x)=-f(x)$.

$\boxed{8}$ O gráfico da função f, definida por $f(x)=x^2\cdot e^{-x}+2x$.

8.1. O gráfico da função f **admite** assimptotas verticais? **Justifica** a tua resposta.

8.2. **Determina** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[f(x)-2x\right]$. **O que podes concluir** quanto à existência de assimptotas oblíquas do gráfico?

$\boxed{9}$ Seja g uma função definida por $g(x)=\dfrac{2x}{1-\ln x}$.

9.1. **Determina** o domínio da função g.

9.2. **Mostra** que $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=-\infty$. **O que podes concluir** quanto à existência de assimptotas não verticais do gráfico de g?

9.3. **Determina**, caso existam, assimptotas verticais do gráfico da função g.

$\boxed{10}$ Seja f uma função de domínio IR^+. Sabe-se que a recta de equação $y=2x-1$ é assimptota do seu gráfico. Considera a função g de domínio IR^+ definida por $g(x)=\dfrac{3f(x)-1}{x}$. **Mostra**, através de processos exclusivamente analíticos, que o gráfico da função g tem uma assimptota horizontal e define-a por uma equação.

$\boxed{11}$ **Mostra** que $\log\left(\sqrt{\dfrac{a}{\sqrt[5]{b^3}}}\right)=\dfrac{1}{2}\log(a)-\dfrac{3}{10}\log(b)$.

$\boxed{12}$ Seja h a função de domínio IR definida por:

$$g(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x+1}} & se \quad x<-1 \\ \sqrt{1-x^2} & se \quad -1\le x\le 1 \\ \ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right) & se \quad x>1 \end{cases}$$

Utilizando exclusivamente métodos analíticos **estuda** a continuidade da função h para $x=-1$ e para $x=1$.