Escola Secundária Dr. Júlio Martins

Probabilidades e Combinatória.

Aluno:________________________________ N.º:____ Turma:____

Primeira Parte

1 A distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é dada pela tabela:

$X = x_i$	0	2	4
$p(X = x_i)$	a	b	b

A média da variável aleatória X é igual a 1 e a e b designam números reais.
Qual é o valor de a e qual é o valor de b?

(A) $a=\frac{1}{2} \wedge b=\frac{1}{4}$. (B) $a=\frac{3}{5} \wedge b=\frac{1}{5}$. (C) $a=\frac{2}{3} \wedge b=\frac{1}{6}$. (D) $a=\frac{1}{2} \wedge b=\frac{1}{6}$.

Exame Nacional 1ª Fase 2005

2 O **quarto número** de uma certa linha do Triângulo de Pascal **é 19600**.
A **soma dos quatro primeiros número**s dessa linha é **20876**.
Qual é o **terceiro número da linha seguinte**?

(A) 1275. (B) 1581. (C) 2193. (D) 2634.

Exame Nacional 1ª Fase 2ª Chamada 2003

3 Um saco contém bolas azuis, brancas e pretas. Tira-se, ao acaso, uma bola do saco.
Sejam os acontecimentos:
A - a bola retirada é azul
B - a bola retirada é branca
Qual das afirmações é verdadeira?

(A) A e B são contrários.
(B) A e $\overline{B}$ são contrários.
(C) A e B são incompatíveis.
(D) A e $\overline{B}$ são incompatíveis.

Exame Nacional 1ª Fase 2ª Chamada 2003

4 Um saco contém cinco cartões numerados de 1 a 5. A Joana retira sucessivamente, ao acaso, os cinco cartões do saco e alinha-os, da esquerda para a direita, pela ordem de saída, de maneira a formar um número de cinco algarismos.
Qual é a probabilidade de esse **número ser par** e de ter **o algarismo das dezenas também par**?

(A) $\frac{{}^5C_2}{{}^5A_2}$. (B) $\frac{{}^5C_2}{5!}$. (C) $\frac{2\times 3!}{{}^5A_2}$. (D) $\frac{2\times 3!}{5!}$.

Exame Nacional 1ª Fase 1ª Chamada 2002

5 A tabela da distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é:

$X = x_i$	1	2	3
$p(X = x_i)$	a	$2a$	a

5.1. O valor de a é:

(A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{1}{3}$. (C) $\frac{1}{4}$. (D) $\frac{1}{5}$.

Exame Nacional 1ª Fase 1ª Chamada 2002

5.2. O valor de m é:

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 6.

Adaptado pelo professor do Exame Nacional 1ª Fase 1ª Chamada 2002

5.3 O valor do desvio padrão é:

(A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (C) 1. (D) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Adaptado pelo professor do Exame Nacional 1ª Fase 1ª Chamada 2002

$\boxed{6}$ O Faustino vai visitar cinco locais, situados em Chaves: as Termas, o Castelo, a Igreja Matriz, a Igreja da Misericórdia e o Forte de S. Francisco.
De quantas maneiras diferentes pode planear **a sequência de cinco visitas**, se **as visitas às Igrejas não são seguidas**?

(A) 24. **(B)** 48. **(C)** 72. **(D)** 120.

$\boxed{7}$ Uma caixa A possui 5 bilhetes diferentes e uma caixa B possui 6 bilhetes diferentes. Tiram-se sucessivamente, sem reposição, 2 bilhetes da caixa A e, também sucessivamente, sem reposição, 2 bilhetes da caixa B.
O número de maneiras diferentes de realizar a extracção é:

(A) ${}^5A_2 \times {}^6A_2$. **(B)** ${}^5A'_2 \times {}^6A'_2$. **(C)** ${}^{11}A_4$. **(D)** ${}^5C_2 \times {}^6C_2$.

$\boxed{8}$ Num armazém há três caixas iguais azuis e oito caixas iguais vermelhas.
Um funcionário esteve a **numerá-las** e de seguida, vai empilhar as caixas de modo que **as fiquem juntas por cores.**
O número de maneiras de o fazer é:

(A) $11!$. **(B)** $3!\times 8!$. **(C)** $(8!+3!)\times 2$. **(D)** $3!\times 8!\times 2$.

$\boxed{9}$ O **penúltimo termo de uma certa linha** do triângulo de Pascal é 15.
A **soma dos quarto e quinto termos da linha anterior** é:

(A) 3003. **(B)** 1365. **(C)** 5005. **(D)** 1820.

$\boxed{10}$ Numa urna estão nove bolas numeradas de 1 a 9. Extraem-se **sucessivamente, sem repor, duas bolas** da urna.
Qual a probabilidade de **não serem da mesma paridade**?

(A) $\frac{4}{9}$. **(B)** $\frac{1}{4}$. **(C)** $\frac{5}{9}$. **(D)** $\frac{5}{18}$.

$\boxed{11}$ A probabilidade de um jogador de basquetebol encestar a bola no cesto é de $0,7$.
O jogador faz **três** tentativas. A probabilidade de **encestar duas vezes ou mais** é:

(A) $0,343$. **(B)** $0,49$. **(C)** $0,7$. **(D)** $0,784$.

$\boxed{12}$ A Diana gravou **7 disquetes**, **5 para a disciplina de Biologia** e **2 para a disciplina de Química**, mas esqueceu-se de lhes pôr uma etiqueta.
A probabilidade de escolher **duas disquetes ao acaso e de serem da mesma disciplina:**

(A) $\frac{10}{21}$. **(B)** $\frac{11}{21}$. **(C)** $\frac{5}{21}$. **(D)** $\frac{1}{21}$.

13 Num ginásio, 35% dos associados praticam musculação, 25% natação e 15% praticam as duas modalidades.
Qual a probabilidade de uma pessoa, escolhida ao acaso, **praticar musculação e não praticar natação**?

(A) 20%. **(B)** 35%. **(C)** 55%. **(D)** 10%.

14 Lança-se um dado perfeito com as faces numeradas de 1 a 6.
Sejam A e B os acontecimentos seguintes: A : o número obtido é par; B: o número obtido é múltiplo de três. A probabilidade $p\left(\overline{A \cup B}\right)$ é igual a:

(A) $\frac{2}{3}$. **(B)** $\frac{1}{3}$. **(C)** $\frac{1}{2}$. **(D)** $\frac{1}{6}$.

15 Numa escola 30% dos alunos praticam desporto.
15% praticam ténis; 20% praticam natação; 5% praticam as duas modalidades.
A percentagem de alunos que pratica **uma e uma só** destas modalidades é

(A) 25%. **(B)** 15%. **(C)** 20%. **(D)** 35%.

16 Seja E o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos $\left(A \subset E \ \wedge \ B \subset E\right)$ tais que:

$p(A)=\frac{1}{4}$, $p\left(\overline{B}\right)=\frac{2}{3}$ e $p\left(A \cup B\right)=\frac{1}{6}$. O valor de $p\left(A \cap B\right)$ é?

(A) $\frac{7}{12}$. **(B)** $\frac{2}{3}$. **(C)** $\frac{5}{12}$. **(D)** $\frac{3}{4}$.

17 No caminho de casa para a escola, a Catarina passa por **4 semáforos, que funcionam independentemente**. A probabilidade de cada um dos semáforos estar vermelho é, respectivamente: $0,4$; $0,2$; $0,5$ e $0,3$.
A probabilidade de encontrar **apenas um semáforo vermelho** é:

(A) $0,106$. **(B)** $0,394$. **(C)** $0,31$. **(D)** 1.

18 A variável X tem distribuição normal de valor médio m e desvio padrão s .
Indica qual das afirmações é falsa.

(A) $p\left(X < m\right)=50\%$. **(B)** m é o maior valor da variável X .

(C) $p\left(X < m - s\right)=p\left(X > m + s\right)$. **(D)** $p\left(m+s < X < m+s\right) > 50\%$.

19 Um dos termos do desenvolvimento de $\left(x+1\right)^n$ é $12x$.
O valor de n é:

(A) 10. **(B)** 11. **(C)** 12. **(D)** 13.

20 A variável altura das alunas do 12º ano segue uma distribuição normal de valor médio 170. Escolhida uma aluna, ao acaso, o que é mais provável?

(A) A sua altura é inferior a 155 cm. **(B)** A sua altura é superior a 180 cm.

(C) A sua altura é superior a 155 cm. **(D)** A sua altura é inferior a 180 cm.

21 Dados 7 pontos, dos quais apenas 3 são colineares, quantas rectas distintas podemos definir com eles?

(A) ${}^7C_2 - {}^3C_2 + 1$.
(B) ${}^7C_2$.
(C) ${}^7C_2 - {}^3C_2$.
(D) ${}^7A_2 - {}^3A_2 + 1$.

Segunda Parte

1 Num saco, estão três bolas pretas e nove bolas brancas, indistinguíveis ao tacto.
Extraem-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, as doze bolas do saco.
Determina:

1.1. A probabilidade de as duas primeiras bolas extraídas **não serem da mesma cor**. Apresenta o resultado na forma de fracção irredutível.

1.2. A probabilidade de **as três bolas pretas serem extraídas consecutivamente** (umas a seguir às outras). Apresenta o resultado na forma de fracção irredutível.

Exame Nacional 1ª Fase 2005

2 Considera um prisma regular em que cada base tem n lados.
Numa pequena composição, justifica que o número total de diagonais de todas as faces do prisma (incluindo as bases) é dado por: $2\left({}^nC_2 - n\right) + 2n$.

Exame Nacional 1ª Fase 2005

3 O João tem catorze discos de música ligeira:

- seis são portugueses;
- quatro são espanhóis;
- três são franceses;
- um é italiano.

3.1. O João pretende seleccionar quatro desses catorze discos.

3.1.1. Quantos conjuntos diferentes pode o João fazer, de tal modo que os **quatro discos seleccionados sejam de quatro países diferentes**, ou seja, um de cada país?

3.1.2. Quantos conjuntos diferentes pode o João fazer, de tal modo que os **quatro discos seleccionados sejam todos do mesmo país**?

3.2. Considera agora a seguinte experiência: o João selecciona, ao acaso, quatro dos catorze discos.
Seja X a variável aleatória: ***«número de discos italianos seleccionados»***.
Constrói a tabela de distribuição de probabilidades da variável X. Apresenta as probabilidades na forma de fracção irredutível.

Exame Nacional 2ª Fase 2005

4 Os diâmetros, em centímetros, de umas peças circulares obedecem à distribuição normal $N(10;0,2)$. Seja X o diâmetro, em centímetros, das peças circulares.
Determina:

4.1. $p(9,8 \le X \le 10,2)$.

4.2. $p(X \le 9,6)$.

4.3. $p(X \ge 10,2)$.

4.4. $p(9,6 \le X \le 10)$.

$\boxed{5}$ A distribuição de probabilidades da variável aleatória X é $B(3;0,2)$.

Nota: $B(n;p)$.

5.1. Determina $p(X=2)$.

5.2. Constrói a tabela de probabilidades da variável aleatória X .

$\boxed{6}$

6.1. Mostra que $p\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=1-p(A)\cdot p\left(B|A\right)$.

6.2. Mostra que $p\left((C\cup D)|F\right)=p\left(C|F\right)+p\left(D|F\right)$, sabendo que C e D são incompatíveis.

6.3. Mostra que se os acontecimentos X e Y são independentes, então $p(X\cup Y)=p(X)+p(Y)\times p\left(\overline{Y}\right)$.

6.4. Seja $\boldsymbol{E}$ o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória e sejam $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ dois acontecimentos possíveis $\left(\boldsymbol{A}\subset\boldsymbol{S}\ \wedge\ \boldsymbol{B}\subset\boldsymbol{S}\right)$.

Mostra que $\boldsymbol{p\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=p\left(\overline{A}\right)-p\left(B\right)+p\left(A/B\right)\cdot p\left(B\right).}$

6.5. Seja $\boldsymbol{E}$ o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória e sejam $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ dois acontecimentos possíveis e independentes tais que $\left(\boldsymbol{A}\subset\boldsymbol{S}\ \wedge\ \boldsymbol{B}\subset\boldsymbol{S}\right)$. **Mostra que** $\boldsymbol{p\left(A\cup B\right)=1-p\left(\overline{A}\right)\cdot p\left(\overline{B}\right)}$.

$\boxed{7}$ Uma urna contém duas bolas verdes e uma bola azul e outra urna contém uma bola verde e três bolas azuis.
Lança-se um **dado perfeito**, **se sair seis tira-se uma bola da primeira urna**, **caso contrário tira-se uma bola da segunda urna**.
Calcula a probabilidade de:
7.1. obter uma bola verde sabendo que saiu seis.
7.2. **sabendo que saiu bola azul ela ter saído da segunda urna**.

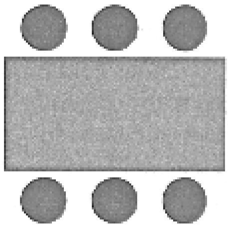
$\boxed{8}$ Numa determinada localidade, foi feita uma sondagem para determinar as audiências de duas estações de rádio A e B. 40% dos inquiridos eram do sexo feminino, 10% dos homens e 20% das mulheres preferem a estação de rádio A.
Interrogando uma pessoa, ao acaso, **calcula** a probabilidade de:
8.1. preferir a estação B sabendo que é homem.
8.2. ser mulher sabendo que prefere a estação A.

$\boxed{9}$ Um saco contém doze bolas, indistinguíveis ao tacto: três bolas com o número1, cinco bolas com o número 2 e quatro bolas com o número 3.
Retiram-se, do saco, três bolas, ao acaso.
Qual é a probabilidade de a soma dos números saídos ser igual a cinco?

Uma resposta correcta para este problema é $\dfrac{{}^{3}C_2\times 4+{}^{5}C_2\times 3}{{}^{12}C_3}$.

Numa pequena **composição**, com cerca de dez linhas, **explica** esta resposta, fazendo referência à **Regra de Laplace**, explicação do **número de casos favoráveis** e explicação do **número de casos possíveis**.

$\boxed{10}$ Um professor de Matemática colocou aos seus alunos do 12º ano o seguinte problema: *Seis amigos entram numa pastelaria para tomar café e sentam-se, ao acaso, numa mesa rectangular com três lugares de cada lado, como esquematizado na figura junta.*



Determina a probabilidade de dois amigos, a Joana e o Rui, ficarem sentados um à frente do outro.

O Professor obteve quatro respostas correctas: $\frac{3\times 2\times 4!}{6!}$, $\frac{3\times 2}{{}^{6}A_{2}}$, $\frac{3}{{}^{6}C_{2}}$ e $\frac{1}{5}$.

Numa pequena **composição explica** estas respostas, fazendo referência:

- à **Regra de Laplace**;
- explicação do **número de casos favoráveis**;
- explicação do **número de casos possíveis**.

$\boxed{11}$ O professor de Matemática do 12º Z propôs o seguinte problema à turma: *“ Uma grade tem doze compartimentos para colocar latas de refrigerantes. De quantas formas diferentes podemos arrumar sete latas na grade, sabendo que quatro delas são de Coca-Cola (e, portanto, indistinguíveis) e as restantes de Ice-Tea (uma de limão, uma de pêssego outra de manga)”*.
A Maria e o Pedro foram os primeiros a responder com segurança.
Os resultados que apresentaram estão ambos certos e foram os seguintes:

Maria: ${}^{12}C_{7}\times{}^{7}A_{3}$ Pedro: ${}^{12}C_{4}\times{}^{8}A_{3}$

Numa **composição** de dez a quinze linhas, **explica** o raciocínio de cada um dos alunos.

$\boxed{12}$ Vinte e cinco jovens (doze rapazes e treze raparigas) pretendem ir ao cinema. Chegados lá, verificam que existem apenas vinte bilhetes (para duas filas com dez lugares consecutivos em cada uma delas). Comprados os vinte bilhetes, cinco jovens vão ficar sem bilhete.
Qual a probabilidade de uma das filas ficar ocupada só com rapazes e a outra só com raparigas.

Uma resposta correcta para este problema é: $\frac{{}^{12}C_{10}\times{}^{13}C_{10}\times 2\times 10!\times 10!}{{}^{25}C_{20}\times 20!}$.

Numa pequena **composição** com cerca de dez linhas **explica** esta resposta, fazendo referência:

- à **Regra de Laplace**;
- explicação do **número de casos favoráveis**;
- explicação do **número de casos possíveis**.