*Escola Secundária Dr. Júlio Martins*

**Ficha de Trabalho N.º 8 de Matemática**

**Tema: Primeira e Segunda Derivadas. Monotonia e Extremos. Concavidades e Pontos de Inflexão. Estudo de Funções. Problemas de Optimização.**

Ano: **12º** Turmas: **B** e **C** Ano lectivo: **2005/2006** O Prof.: *António A. D. Lopes*

**1.** Considera as funções reais de variável real definidas por:

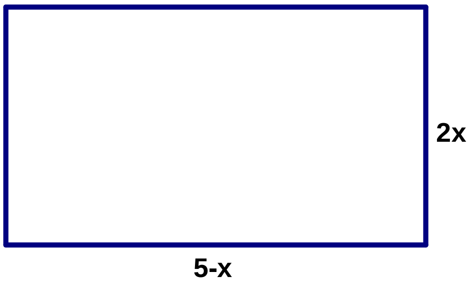
$f(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}$ $\quad g(x)=\dfrac{x^3+2x}{x^2-x}$ $\quad h(x)=\sqrt{x^2+3x}$ $\quad j(x)=x\cdot e^{\frac{1}{x}}$

**1.1. Faz** o estudo analítico possível da função $f$.

**1.2. Faz** um estudo analítico completo de cada uma das funções $g$, $h$ e $j$.

- Domínio
- Zeros, variação do sinal e intersecção com o eixo dos yy
- Paridade
- Limites, continuidade e assimptotas
- 1ª derivada, variação de sentido (monotonia) e extremos
- 2ª derivada, concavidades e pontos de inflexão
- Gráfico e contradomínio.

**2.** As dimensões de um rectângulo estão representadas na figura em $cm$.




**Determina** o valor real de $x$ para o qual a área é máxima.

**3.** Tenho um cone de madeira, com $20\,cm$ de raio e $30\,cm$ de altura, que quero aproveitar para construir um cilindro.

**Diz** quais as dimensões do cilindro para que:

**3.1.** o volume seja máximo.

**3.2.** a área lateral seja máxima.

**4.** Considera a função real de variável real $f$ definida por $f(x)=\dfrac{x}{1-\log x}$.

**4.1. Determina** o domínio e **verifica** que a recta de equação $x=10$ é uma assimptota do gráfico de $f$.

**4.2. Estuda** a monotonia da função.

**4.3. Determina** o máximo relativo da função.

**4.4. Determina** $D'_f$.

**5.** Considera a função $g$, real de variável real, definida por $g(x)=\begin{cases} x+e^x+a & se \quad x\le 0 \\ \log\dfrac{x^2+1}{e} & se \quad x>0 \end{cases}$, onde $a\in IR$.

**5.1. Determina** o valor de $a$ sabendo que a função $g$ é contínua.

**5.2. Estuda** o sentido das concavidades e **determina** os pontos de inflexão do gráfico da restrição de $g$ a $IR^+$.

**5.3. Prova** que a equação $g(x)=a$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[-1,0]$.

**6.** De uma função $h$, de domínio $IR$, sabe-se que a sua derivada é dada por $h'(x)=(x+1)e^x-10x$.

Seja $A$ o ponto de inflexão do gráfico de $h$.
Recorrendo as capacidades gráficas da calculadora, **determina** a abcissa do ponto $A$, arredondado às décimas.
**Explica** como procedeste. **Inclui**, na tua explicação, o(s) gráfico(s) que obtiveste na calculadora.

**7.** Seja $f$ uma função contínua, de domínio $[0,5]$ e contradomínio $[3,4]$.

Seja $g$ a função de domínio $[0,5]$, definida por $g(x)=f(x)-x$.

**Prova** que a função $g$ tem pelo menos um zero.

**8.** Considera a função $f$, de domínio $IR\setminus\{0\}$, definida por $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$.

**8.1.** Sem recorrer à calculadora, **resolve** as duas alíneas seguintes:

**8.1.1. Determina** a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa $1$.

**8.1.2. Estuda** a função $f$ quanto à existência de assimptotas do seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados.

**8.2.** O conjunto.solução da inequação $f(x)\le 3+\ln x$ é um intervalo fechado $[a,b]$.

Recorrendo à calculadora, **determina** graficamente, valores para $a$ e $b$, arredondados às centésimas.
Nota: **apresenta**, na tua resposta **os elementos recolhidos** na utilização da calculadora, nomeadamente, o **gráfico** ou **gráficos** obtido(s), bem como **coordenadas relevantes** de alguns pontos.

**9.** De uma função $g$, sabe-se que: $D_g=IR^+$, $g(1)=0$ e $g'(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$.

**9.1. Escreve** uma equação da recta tangente ao gráfico de $g$ no ponto de abcissa $1$.

**8.2. Poderá concluir-se** que $g$ é contínua para $x=1$? **Justifica** a tua resposta.

**9.3. Mostra** que $g''(x)=\dfrac{-\ln x}{x^2}$ e **estuda** $g$ quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e à existência de pontos de inflexão.