Ficha de Trabalho Nº 1 de Matemática Tema: Sucessões

Nome:____ N.º:_______

1. Considera as sequências:

A: 1, 3, 5, 7, 9, … B: 6, 8, 10, 12, 14, … C: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, ...$ D: $-1, 2, -3, 4, -5, ...$

1.1. Indica o 6º termo para cada uma das sequências dadas. R: $11,\ 16,\ \frac{1}{64},\ 6$.

1.2. Para cada sequência, **indica** uma expressão do termo geral.

R: $2n-1,\ 2n+4,\ \frac{1}{2^n},\ (-1)^n \cdot n$.

2. Considera a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = 7n - n^2$.

2.1. Calcula os quatro primeiros termos e representa-os graficamente. R: $6, 10, 12, 12$

2.2. Verifica se 30 é termo da sucessão. R: Não é termo.

2.3. Diz a partir de que ordem, os termos são negativos. R: $n = 8$ (inclusive).

3. Considera a sucessão (v_n) definida por $v_n = \frac{n+9}{n}$.

3.1. Calcula os dois primeiros termos. R: $10, \frac{11}{2}$.

3.2. Determina a ordem do termo igual a 2. R: $n = 9$.

3.3. Verifica se 7 é termo da sucessão. R: Não é termo.

3.4. Determina a ordem a partir da qual os termos são inferiores a $\frac{3}{2}$. R: $n \geq 19$.

4. A sucessão (w_n) é definida por recorrência $\begin{cases} w_1 = -3 \\ w_{n+1} = 2 \cdot w_n + 5,\ \forall n \in IN \end{cases}$.

4.1. Calcula os três primeiros termos. R: $-3, -1, 3$.

4.2. Calcula w_{12} sabendo que $w_{10} = 1019$. R: $w_{12} = 4091$.

5. Considera a sucessão $(a_n): n \to \frac{2n+1}{n}$.

5.1. Determina a expressão que define:

5.1.1. a_{n+1}. R: $a_{n+1} = \frac{2n+3}{n+1}$.

5.1.2. $a_{n-1}, (n > 1)$. R: $a_{n-1} = \frac{2n-1}{n-1}$.

5.2. Determina o sinal de:

5.2.1. $a_6 - a_5$. R: $a_6 - a_5 < 0$.

5.2.2. $a_7 - a_6$. R: $a_7 - a_6 < 0$.

5.2.3. $a_{n+1} - a_n$. R: $a_{n+1} - a_n < 0$.

6. Estuda quanto à monotonia as sucessões de termos gerais:

6.1. $a_n = \frac{(-1)^n}{2}$. R: Não é monótona.

6.2. $b_n = \frac{1}{n}$. R: É monótona decrescente em sentido estrito.

6.3. $c_n = 2 - n$. R: É monótona decrescente em sentido estrito.

6.4. $d_n = \begin{cases} 5 & se \quad n < 6 \\ n-1 & se \quad n \geq 6 \end{cases}$. R: É monótona crescente em sentido lato.

6.5. $e_n = \frac{n-1}{2n}$. R: É crescente em sentido estrito.

6.6. $f_n = (-1)^n + n$. R: Não é monótona.

6.7. $g_n = \frac{n+3}{1+n}$. R: É decrescente em sentido estrito.

7. Dados os conjuntos $A = \{-3,0,1\}$, $B = [1,7[$, $C =]-5,+\infty[$ e $D =]-\infty.4] \cup \{5,6\}$.
Indica, caso existam, o conjunto dos majorantes e o conjunto dos minorantes para cada um deles e **diz** se são limitados.
R:

Conjunto	Conjunto dos majorantes	Conjunto dos minorantes	Limitado
A	$[1,+\infty[$	$]-\infty,-3]$	Sim
B	$[7,+\infty[$	$]-\infty,1]$	Sim
C	Não tem	$]-\infty,-5]$	Não
D	$[6,+\infty[$	Não tem	Não

8. Das sucessões de termos gerais **identifica** as limitadas e **indica** um majorante e um minorante dos respectivos conjuntos de termos.

8.1. $u_n = \frac{1}{n}$. R: Limitada; Majorante $= 1$; Minorante $= 0$.

8.2. $v_n = n^2$. R: Não limitada.

8.3. $w_n = \cos(n\pi)$. R: Limitada; Majorante $= -1$; Minorante $= 1$.

9. Mostra que são limitadas as sucessões:

9.1. $a_n = 3 + \frac{1}{n}$.

9.2. $b_n = \frac{n-3}{n}$.

9.3. $c_n = \frac{5n+7}{2+n}$.

9.4. $d_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

9.5. $e_n = \begin{cases} 5 - \frac{2}{n} & se \quad n \text{ ímpar} \\ 1 & se \quad n \text{ par} \end{cases}$.

9.6. $f_n = \begin{cases} -\frac{2}{n} & se \quad n > 10 \\ 3 & se \quad n \leq 10 \end{cases}$

9.7. $g_n = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n} & se \quad n \text{ ímpar} \\ 3+\dfrac{1}{n} & se \quad n \text{ par} \end{cases}$.

10. Considera a sucessão (u_n) definida por $u_n = \dfrac{1+2n}{n+2}$.

10.1. Calcula o quarto termo de (u_n).

10.2. Estuda, analiticamente, a sucessão (u_n) quanto à monotonia.

10.3. Indica, justificando a resposta, o valor lógico da proposição: $\exists n \in IN : u_n = \dfrac{31}{17}$.

10.4. Verifica, apresentando os cálculos, que a sucessão (u_n) é limitada.

10.5. Prova que $u_n - 2 \to 0$. O que podes concluir acerca da convergência da sucessão (u_n)?

Respostas: 10.1. $u_4 = \dfrac{3}{2}$. 10.2. A sucessão é monótona crescente. 10.3. Verdadeira, é o 15º termo. 10.4. $1 \leq u_n < 2$. 10.5. É convergente para 2.

11. Considera a sucessão (v_n) definida por $v_n = (-1)^n \cdot \dfrac{1+n}{3n}$.

11.1. Estuda a sucessão (v_n) quanto à monotonia.

11.2. Verifica se $\forall n \in IN : -\dfrac{2}{3} \leq v_n \leq \dfrac{1}{2}$.

11.3. Indica, justificando a resposta, o valor lógico da afirmação $\exists n \in IN : u_n = \dfrac{5}{4}$.

Respostas: 11.1. Não é monótona. 11.3. Falsa.

12. Considera a sucessão definida por recorrência $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{2}{3}\,,\ n \rangle 1 \end{cases}$.

12.1. Calcula os cinco primeiros termos e **representa-os** graficamente.
12.2. Mostra que é uma progressão aritmética.
12.3. Determina uma expressão do termo geral.
12.4. Classifica a progressão quanto à monotonia. **Justifica** a tua resposta.
12.5. Averigua se a sucessão é ou não limitada.
12.6. Diz se a sucessão é convergente? **Justifica** a tua resposta.
12.7. Calcula a soma dos 20 termos consecutivos a partir do terceiro exclusive.

Respostas: 12.1. $u_1 = -2$, $u_2 = -\dfrac{4}{3}$, $u_3 = -\dfrac{2}{3}$, $u_4 = 0$, $u_5 = \dfrac{2}{3}$. 12.2. $r = \dfrac{2}{3}$. 3.3. $u_n = \dfrac{2}{3}n - \dfrac{8}{3}$. 12.4. Monótona crescente porque a razão é positiva. 12.5. Não é limitada. 12.6. Não porque $u_n \to +\infty$. 12.7. $S_{20} = \dfrac{280}{3}$.

13. Considera a sucessão (w_n) de termo geral $w_n = \dfrac{4}{3^{1-n}}$.

13.1. Prova que (w_n) é uma progressão geométrica.

13.2. Estuda (w_n) quanto à monotonia.

13.3. Calcula a soma dos 10 primeiros termos consecutivos da progressão.

Respostas: 13.1. r = 3. 13.2. A sucessão é monótona crescente porque $w_1 > 0$ e $r > 1$. 13.3. S_{10} = 118096.

14. Em 1995, o número de habitantes de uma aldeia era 1250. Nesta aldeia a população aumenta 5% ao ano. Quantos habitantes haverá, nessa aldeia, no ano 2001?
Respostas: 1675 habitantes.

15. Considera uma sucessão (a_n) em que $a_1 = 2$ e $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n$.

15.1. Determina a_3 e a_4.

15.2. Prova que a sucessão (a_n) é uma progressão geométrica.

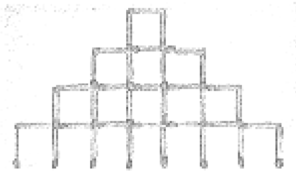
15.3. Estuda (a_n) quanto à monotonia.

15.4. Exprime a_n em função de n.

15.5. Calcula a soma dos vinte primeiros termos consecutivos de (a_n).

Respostas: 15.1. $a_3 = \frac{9}{8}$ e $a_4 = \frac{27}{32}$. 15.2. $r = \frac{3}{4}$. 15.3. Monótona decrescente. 15.4. $a_n = 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ 15.5. S_{20} = 7,9.

16. Utilizando fósforos, o Victor começou a construir numa mesa a figura apresentada.



Determina quantas filas pode construir com 1485 fósforos. Resposta: 27

17. Um coleccionador comprou uma obra de arte por 600 €. Por cada ano que passa há uma valorização de 8% em relação ao valor que a obra tinha no ano anterior.

17.1. Qual o valor da obra passado um ano? E passados três anos? R: 648 €; 755,83 €.

17.2. Designa por (a_n) o valor da obra passados n anos após a compra da mesma.

17.2.1. Exprime a_{n+1} em função de a_n. R: $a_{n+1} = 1{,}08 \cdot a_n$.

17.2.2. Mostra que (a_n) é uma progressão geométrica. R: $a_1 = 648;\ r = 1{,}08$.

17.2.3. Mostra que a soma dos n primeiros termos é $S_n = 8100\left(1{,}08^n - 1\right)$.

17.2.4. Recorrendo à calculadora **determina** o número de anos após a compra em que a valorização atingiu 50% em relação ao valor de compra. Apresenta o resultado arredondado às unidades. R: 6 anos.

18. Sabendo que $a_n \to 2$, $b_n \to \frac{5}{2}$ e $c_n \to 0$ calcula:

18.1. $\lim(a_n + b_n)$. R: 9/2.

18.2. $\lim(a_n \cdot c_n)$. R: 0.

18.3. $\lim\left(\frac{c_n}{b_n}\right)$. R: 0.

18.4. $\lim\sqrt{a_n \cdot b_n}$. R: $\sqrt{5}$.

18.5. $\lim\left[(c_n)^{b_n}\right]$. R: 0.

18.6. $\lim\left[(b_n)^{c_n}\right]$. R: 1.

19. Sabendo que $a_n \to +\infty$, $b_n \to -\infty$, $c_n \to 0$, $d_n \to 3$ e $e_n \to \frac{5}{2}$ calcula, se existir:

19.1. $\lim(a_n - b_n)$. R: $+\infty$.

19.2. $\lim\left(\frac{d_n}{a_n}\right)$. R: 0.

19.3. $\lim\left[(d_n)^{a_n}\right]$. R: $+\infty$.

19.4. $\lim\left[(e_n)^{b_n}\right]$. R: 0.

19.5. $\lim\left[-a_n\cdot(-b_n)\right]$. R: $-\infty$.

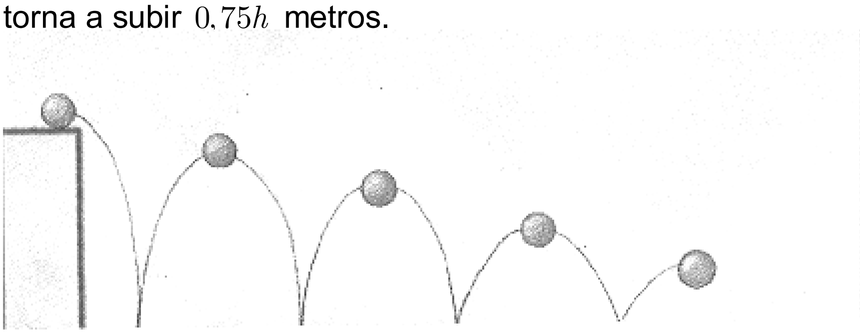
19.6. $\lim(a_n)^{c_n}$. R: Indeterminação $\left(\infty^0\right)$.

19.7. $\lim\left(\dfrac{b_n}{e_n}\right)$. R: $-\infty$.

19.8. $\lim(c_n\cdot b_n)$. R: Indeterminação $(0\cdot\infty)$.

19.9. $\lim\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$. R; Indeterminação $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

20. Uma bola é largada de uma altura de 4 metros. De cada vez que a bola cai h metros, torna a subir $0{,}75h$ metros.



Determina a distância total que a bola percorre (na subida e descida). Resposta: 16 m

21. Calcula:

21.1. $\lim\dfrac{n^2+1}{3n^2-2}$. Resposta: $\dfrac{1}{3}$

21.2. $\lim\dfrac{1-n}{n^2+3}$. Resposta: 0

21.3. $\lim\dfrac{n^3+3n}{n^2+1}$. Resposta: $+\infty$

21.4. $\lim\dfrac{5n-n^5+3n^2}{1+n^3}$. Resposta: $-\infty$

21.5. $\lim\left(\dfrac{n+1}{n}-\dfrac{n+3}{2n}\right)$. Resposta: $\dfrac{1}{2}$

21.6. $\lim\left(\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{n^3+5}{n^2}\right)$. Resposta: 1

21.7. $\lim\sqrt{\dfrac{n^2+3}{4n^2+1}}$. Resposta: $\dfrac{1}{2}$

21.8. $\lim\dfrac{3^{n+1}+7}{3^n-1}$. Resposta: 3

21.9. $\lim\dfrac{2^n+3}{4^n+8}$. Resposta: 0

21.10. $\lim(5^n-6^n)$. Resposta: $-\infty$

21.11. $\lim\left(n^8-n^5\right)$. Resposta: $+\infty$

21.12. $\lim\left(\sqrt{n^2+2}-n\right)$. Resposta: 0

21.13. $\lim\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right)$. Resposta: $\dfrac{1}{2}$

21.14. $\lim \dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$. Resposta: 1

22. Calcula, se possível, a soma de todos os termos da progressão geométrica cujos primeiros termos são:

22.1. $\frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, ...$ Resposta: $\frac{1}{6}$

22.2. $4, -2, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ...$ Resposta: $\frac{8}{3}$

22.3. $2, 4, 8, 16, ...$ Resposta: $+\infty$

23. Calcula:

23.1. $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Resposta: e

23.2. $\lim\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}$. Resposta: e

23.3. $\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$. Resposta: e^{-1}

23.4. $\lim\left(1+\frac{1}{2^n}\right)^{2^n}$. Resposta: e

23.5. $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}$. Resposta: e

23.6. $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{8n}$. Resposta: e^{8}

23.7. $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-3n}$. Resposta: e^{-3}

23.8. $\lim\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n$. Resposta: $e^{1/3}$

23.9. $\lim\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^n$. Resposta: e^{-3}

23.10. $\lim\left(\frac{3n+1}{4n+1}\right)^n$. Resposta: 0

23.11. $\lim\left(\frac{n^2-1}{n^2+2n+1}\right)^n$. Resposta: e^{-2}

23.12. $\lim\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^n$. Resposta: e^{-1}

24. Determina o quarto termo de uma progressão geométrica em que a razão é $-\frac{1}{4}$ e a soma de todos os termos é 8. Resposta: $-\frac{5}{32}$

25. Calcula em quanto se transformam 1000 euros ao fim de um ano, a 8%, sendo o juro capitalizado:

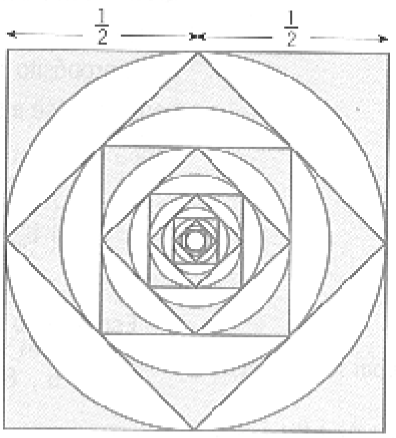
25.1. semestralmente. Resposta: 1081,6 euros

25.2. de dois em dois meses. Resposta: 1082,7 euros

25.3. mensalmente. Resposta: 1082,9955 euros

25.4. continuamente. Resposta: 1083,287 euros

26. A figura mostra quadrados e círculos inscritos nos quadrados.



Considera que a medida numa certa unidade do lado do maior quadrado é 1, e que (l_n), (a_n), (p_n) são as sucessões dos lados, das áreas e dos perímetros dos quadrados e (c_n) a sucessão das áreas dos círculos.

26.1. Define (l_n), (a_n), (p_n) e (c_n).

Respostas: $l_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$; $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; $p_n = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$ e $c_n = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

26.2. Determina a área colorida na figura considerando que o processo de construção continua indefinidamente. Resposta: $2 - \frac{\pi}{2}$

27. Em quanto se transformam 500 euros ao fim de dois anos, à taxa anual de 6%, sendo o juro capitalizado:

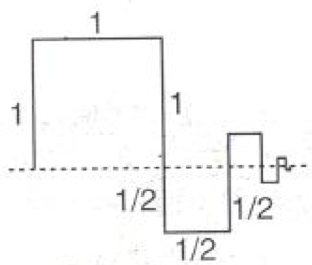
27.1. de 3 em 3 meses. Resposta: 563,246 euros

27.2. três vezes por ano. Resposta: 563,081 euros

27.3. todas as semanas. Resposta: 563,708 euros

27.4. a todo o instante. Resposta: 563,748 euros

28. Observa a figura:



Calcula a soma de «todas» as áreas dos quadrados entre a linha a cheio e a tracejada.

Resposta: $\frac{4}{3}$

29. Considera a seguinte sequência: $2, -1, -4, -7, \ldots$. Sabendo que se mantém a regularidade, qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) -16 não é termo da sucessão.

(B) O quinto termo da sucessão é 10.

(C) A sucessão é uma progressão aritmética de termo geral $u_n = 2n$.

(D) A sucessão é uma progressão aritmética de razão -3.

Resposta: (D)

30. Sabe-se que $a_n \to -2$ e (b_n) e (c_n) são duas subsucessões de (a_n). Então:

(A) $b_n \to -2$ e $c_n \to -2$.

(B) $b_n \times c_n \to -4$.

(C) $b_n \times c_n \to 2$,

(D) $b_n \to -2$ e $c_n \to 2$.

Resposta: (A)

31. Sendo (u_n) uma sucessão cuja representação gráfica está sobre uma parábola, então podemos afirmar que

(A) (u_n) e um infinitamente grande positivo.

(B) $u_n \to -\infty$.

(C) (u_n) é um infinitésimo.

(D) (u_n) é um infinitamente grande negativo se a concavidade da parábola for voltada para baixo.

Resposta: (D)

32. Se $u_n - k$ é um infinitésimo, então:

(A) u_n é um infinitésimo.

(B) $u_n \to k$.

(C) $u_n \to -k$.

(D) $\frac{1}{u_n - k} \to +\infty$

Resposta: (B)

33. Se (v_n) é um infinitésimo e $u_n = \frac{(-1)^n - 3}{v_n}, \forall n \in IN$, então:

(A) $u_n \to +\infty$.

(B) $u_n \to -\infty$.

(C) $|u_n| \to +\infty$.

(D) $u_n \to 0$.

Resposta: (C)

34. Considera as sucessões cujos termos gerais são os seguintes:

$$u_n = \frac{1-2n}{n};\ v_n = \frac{1}{n^2} + \pi^n \text{ e } w_n = -n^3.$$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $\lim(u_n \cdot v_n) = 0$.

(B) $\lim(u_n \cdot v_n) = -\infty$.

(C) $\lim(u_n + w_n) = +\infty$.

(D) $\lim(u_n + v_n) = -2$.

Resposta: (B)

35. Sendo $\lim\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^{an^2} = e$, o valor de a é:

(A) 0.

(B) e^2.

(C) -2.

(D) $\frac{1}{2}$.

Resposta: (D)

36. Seja $a_n = \pi^{-n}$.

Então $\lim(a_1 + a_2 + ... + a_n)$ é igual a:

(A) $\frac{1}{\pi - 1}$.

(B) $\frac{1}{\pi + 1}$.

(C) $+\infty$

(D) 0.

Resposta: (A)